

مقدمه مؤلفان

ویژگی های این کتاب و شیوه استفاده از آن:

- ۱ پاسخ سؤال ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال های اول، راه حل ها تشریحی تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می روید راه حل ها حرفه ای تر، سریع تر و با توضیح کم تر می شوند.
- ۲ در پاسخ تست ها، آیکن های زیر را می بینید:

نماد آیکن	توضیح
	یه مفهوم، مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع تر و بهتر حل کنید.
	مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت ها هم در اشاره : سؤالی پرسیده ایم که باعث می شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.
	همان طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.
	راه اول:
	راه دوم:
	عددگذاری:

- ۳ توصیه می کنیم برای حل تست ها:
 - الف** تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰ تا ۴۰ تا) برای یک نشست انتخاب کنید.
 - ب** با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته اید تست ها را حل کنید.
 - پ** به پاسخ نامه کلیدی که در جلد درس نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست هایی را که نزده اید یا جواب نادرست داده اید مشخص کنید.
 - ت** برگردید و سعی کنید اولاً تست هایی را که حل نکرده اید حل کنید و ثانیاً تست هایی را پاسخ نادرست داده اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می توانید به پاسخ درست برسید.
 - ث** حالا بیاید سراغ پاسخ نامه، پاسخ همه تست ها را حتی آن هایی را که درست پاسخ داده اید بررسی کنید. به **نکته**: ها، **اشاره**: ها، **راه اول**: و **راه دوم**: توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.
 - ۴** گاهی وقت ها ممکن است با دیدن راه حل یک تست که به نظر طولانی می رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه حل ها به علت این که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.
 - ۵** در بعضی از سؤال ها، از روش **عددگذاری**: استفاده کرده ایم. سعی مان این بوده که در تست هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیمش این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده ایم در استفاده از **عددگذاری**: زیاده روی و افراط نکنیم.
- کل پاسخ ها چند بار بررسی و ویرایش شده اند. سعی مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهتر شدن این کتاب بسیار کمک می کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می شویم که بشنویم.
- هم چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در باز نویسی کتاب کمک کرده اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.
- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می کنند نیز درخواست می کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

فهرست

فصل اول: تابع

فصل ۵ ریاضی دهم - فصل ۲ حسابان یازدهم - فصل ۱ حسابان دوازدهم

شماره
صفحه

شماره
پاسخ

۸	۱	درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه
۱۵	۶۳	درس ۲: دامنهٔ توابع - تساوی توابع
۲۳	۱۲۹	درس ۳: معرفی چند تابع خاص (ثابت، همانی، خطی، قطعه‌ای و گویا)
۳۰	۱۸۶	درس ۴: تبدیل نمودارها (انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض)
۴۳	۲۶۷	درس ۵: توابع چندجمله‌ای - تابع درجه ۳
۴۷	۲۹۱	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۵۳	۳۲۸	درس ۷: ترکیب توابع
۶۷	۴۲۴	درس ۸: توابع یکنوا (توابع صعودی و نزولی)
۷۶	۴۸۸	درس ۹: تابع یک‌به‌یک
۷۹	۵۱۲	درس ۱۰: تابع وارون - ترکیب f و f^{-1}
۹۸	۶۴۶	درس ۱۱: بُرد
۱۰۴	۶۸۹	درس ۱۲: تقسیم

فصل دوم: مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم - فصل ۴ حسابان یازدهم - فصل ۲ حسابان دوازدهم

۱۱۴	۷۶۱	درس ۱: رادیان
۱۱۶	۷۸۵	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه - مساحت چند شکل
۱۲۱	۸۳۰	درس ۳: دایرهٔ مثلثاتی - رابطهٔ شیب خط با تانژانت
۱۲۷	۸۷۷	درس ۴: اتحادهای مثلثاتی مقدماتی
۱۳۲	۹۱۶	درس ۵: زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان
۱۳۶	۹۴۷	درس ۶: اتحادهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ ، 2α و
۱۵۶	۱۰۸۹	درس ۷: توابع متناوب
۱۵۹	۱۱۱۹	درس ۸: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی
۱۶۸	۱۱۸۱	درس ۹: تانژانت
۱۷۳	۱۲۱۲	درس ۱۰: معادلهٔ مثلثاتی

فصل سوم: حد، پیوستگی و مجانب

فصل ۵ حسابان یازدهم - فصل ۳ حسابان دوازدهم

۱۸۷	۱۳۰۲	درس ۱: همسایگی
۱۸۸	۱۳۱۴	درس ۲: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۱۹۶	۱۳۸۸	درس ۳: رفع ابهام صفرصفرم (با تجزیه، با گویاکردن، با هوپیتال و با هم‌ارزی‌ها)
۲۱۱	۱۵۱۲	درس ۴: حد بی‌نهایت
۲۱۶	۱۵۶۸	درس ۵: حد در بی‌نهایت
۲۲۶	۱۶۵۴	درس ۶: مجانب (قائم و افقی)
۲۳۶	۱۷۲۴	درس ۷: پیوستگی

فصل چهارم: مشتق

فصل ۴ حسابان دوازدهم

۲۴۷	۱۸۰۱	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق (تعریف مشتق)
۲۵۰	۱۸۳۴	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری (تمام فرمول‌های مشتق)
۲۵۸	۱۹۱۶	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن) - مشتق دوم
۲۶۴	۱۹۷۵	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۲۷۰	۲۰۱۴	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق - نیم‌مماس چپ و راست
۲۷۶	۲۰۶۰	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)
۲۷۸	۲۰۷۶	درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم
۲۸۵	۲۱۳۵	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق (رسم نمودار f')
۲۸۸	۲۱۵۶	درس ۹: مشتق تابع مرکب - قاعده هوپیتال
۲۹۷	۲۲۳۵	درس ۱۰: آهنگ تغییر (متوسط و لحظه‌ای)

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ۵ حسابان دوازدهم

۳۰۰	۲۲۶۰	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق (آزمون مشتق اول)
۳۰۵	۲۳۰۲	درس ۲: نقطه بحرانی
۳۱۰	۲۳۴۳	درس ۳: اکسترم‌های نسبی
۳۱۸	۲۴۰۰	درس ۴: اکسترم‌های مطلق
۳۲۳	۲۴۳۷	درس ۵: بهینه‌سازی
۳۳۲	۲۴۸۷	درس ۶: تقعر و نقطه عطف
۳۴۶	۲۵۷۲	درس ۷: رسم نمودار (تابع درجه ۳ و ۴ و هموگرافیک)

فصل ششم: معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ حسابان یازدهم

۳۵۳	۲۶۱۷	درس ۱: روش‌های حل معادله درجه دو
۳۶۷	۲۷۲۵	درس ۲: سهمی

فصل هفتم: معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ حسابان یازدهم

۳۷۹	۲۸۰۶	درس ۱: معادلات گویا
۳۸۳	۲۸۴۰	درس ۲: معادلات رادیکالی
۳۸۸	۲۸۸۱	درس ۳: تعیین علامت و نامعادله

فصل هشتم: قدرمطلق و جزء صحیح

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل‌های ۱ و ۲ حسابان یازدهم

۳۹۴	۲۹۲۱	درس ۱: قدرمطلق
۴۰۴	۳۰۰۴	درس ۲: جزء صحیح

فصل نهم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

۴۱۲	۳۰۶۷	درس ۱: توان و ریشه
۴۱۳	۳۰۸۶	درس ۲: رادیکال‌ها و توان‌های گویا
۴۱۴	۳۱۰۲	درس ۳: اتحادها و تجزیه
۴۲۰	۳۱۵۷	درس ۴: گویاکردن مخرج کسرها

فصل دهم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۳ حسابان یازدهم

۴۲۳	۳۱۷۸	درس ۱: تابع نمایی
۴۲۹	۳۲۲۹	درس ۲: تابع لگاریتمی
۴۳۳	۳۲۶۳	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم
۴۳۷	۳۳۱۵	درس ۴: معادلات لگاریتمی
۴۴۰	۳۳۴۰	درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

فصل یازدهم: الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم - فصل ۱ حسابان یازدهم

۴۴۲	۳۳۵۲	درس ۱: الگوهای هندسی
۴۴۶	۳۳۸۹	درس ۲: دنباله حسابی
۴۵۳	۳۴۵۶	درس ۳: دنباله هندسی

فصل دوازدهم: هندسه تحلیلی

فصل ۱ حسابان یازدهم

۴۶۱	۳۵۲۰	درس ۱: هندسه تحلیلی
-----	------	---------------------



۵۱۲. ۲ برای محاسبه $f^{-1}(1)$ باید در f دنبال زوج مرتبی باشیم که مؤلفه

دومش ۱ باشد: $(4, 1)$ پس $f(4) = 1$ و در نتیجه $f^{-1}(1) = 4$.

برای محاسبه $g^{-1}(-1)$ باید دنبال پیکانی باشیم که انتهایش ۱- باشد:

$2 \rightarrow -1$

پس $g(2) = -1$ و در نتیجه $g^{-1}(-1) = 2$.

بنابراین: $g^{-1}(-1) + f^{-1}(1) = 2 + 4 = 6$

۵۱۳. ۴ وقتی وارون f از نقطه $(12, 5)$ می‌گذرد، خود تابع f باید از نقطه

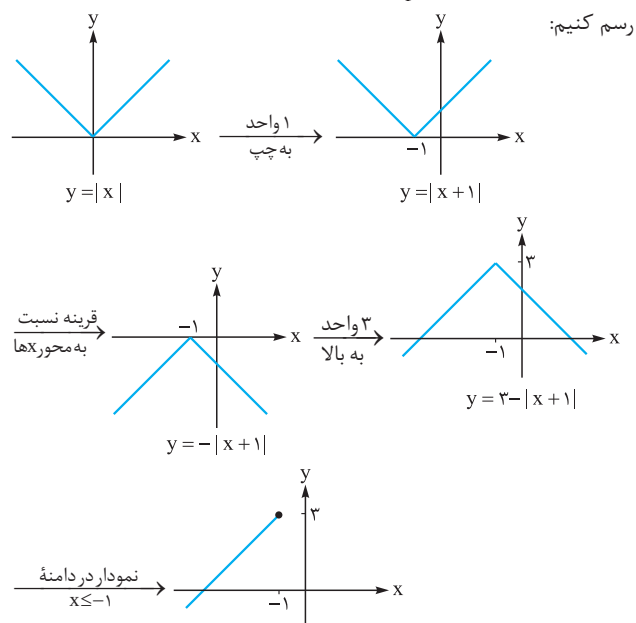
$(5, 12)$ عبور کند، پس:

$$f(x) = \frac{ax+1}{x-2} \xrightarrow{f(5)=12} 12 = \frac{5a+1}{5-2} \Rightarrow 5a+1 = 36 \Rightarrow a = 7$$

ضابطه f به شکل $f(x) = \frac{7x+1}{x-2}$ درمی‌آید و مقدار $f(a)$ یعنی $f(7)$ برابر

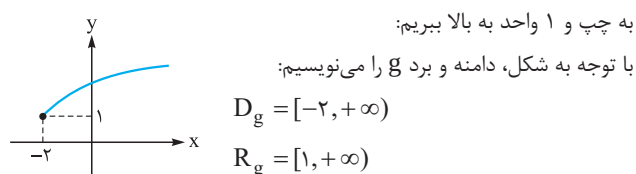
$$f(7) = \frac{7(7)+1}{7-2} = \frac{50}{5} = 10 \text{ است با:}$$

راه دوم: برای پیدا کردن $D_{f^{-1}}$ یا همان برد f ، می‌توانیم نمودار تابع f را هم



حالا طبق نمودار، برد تابع f (یا همان دامنه تابع f^{-1}) برابر است با $(-\infty, 3]$.

۵۲۰. ۴ برای رسم تابع $g(x) = \sqrt{x+2} + 1$ ، باید تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد



به چپ و ۱ واحد به بالا ببریم:

با توجه به شکل، دامنه و برد g را می‌نویسیم:

$$D_g = [-2, +\infty)$$

$$R_g = [1, +\infty)$$

برای تابع g^{-1} ، باید جای دامنه و برد g را عوض کنیم:

$$D_{g^{-1}} = R_g = [1, +\infty)$$

$$R_{g^{-1}} = D_g = [-2, +\infty)$$

عضوهای صحیح غیرمشتک دو مجموعه بالا، اعداد -1 ، -2 و 0 هستند.

۵۲۱. ۳ برد f^{-1} ، همان دامنه f است. برای محاسبه دامنه تابع

$$f(x) = \sqrt{2x+5} - \sqrt{4-x}$$

باید اشتراک دامنه دو عبارت رادیکالی را بگیریم:

$$2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_f = [-\frac{5}{2}, 4]$$

پس برد f^{-1} هم همان $[-\frac{5}{2}, 4]$ است و در نتیجه:

$$b-2a = 4 - 2(-\frac{5}{2}) = 9$$

$$f(4) = \sqrt{2 \cdot 4 + 5} - \sqrt{4-4} = \sqrt{13} - 0 = \sqrt{13}$$

$$f^{-1}(4) = \sqrt{13}$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = 2 + 12 = 14$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = 2 + 12 = 14$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = 2 + 12 = 14$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = 2 + 12 = 14$$

$$f(4) + f^{-1}(4) = 2 + 12 = 14$$

$$f(4) = 21 \text{ و } f(1) = 6 \text{ به ترتیب } f^{-1}(21) = 4 \text{ و } f^{-1}(6) = 1 \text{ از ۱. ۵۱۴}$$

را نتیجه می‌گیریم.

دو نقطه از خط را داریم: $B(4, 21)$ و $A(1, 6)$

$$m = \frac{21-6}{4-1} = 5$$

شیب خط را پیدا می‌کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = 5(x - 1) \Rightarrow y = 5x + 1$$

$$f(x) = 5x + 1$$

پس:

۵۱۵. ۲ برای پیدا کردن نقطه برخورد f^{-1} با محور x ، باید در f^{-1} ،

$$y = 0 \text{ را قرار دهیم. پس الان که } f^{-1} \text{ را نداریم باید در } f, x = 0 \text{ را قرار دهیم:}$$

$$y = x^3 + 2x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3 \xrightarrow{\text{نقطه}} (0, -3)$$

پس تک‌نقطه برخورد f^{-1} با محور x ، نقطه $(-3, 0)$ است.

۵۱۶. ۲ اگر نقطه (a, b) روی f باشد، نقطه (b, a) روی f^{-1} است.

پس در تمام گزینه‌ها جای x و y نقاط را عوض می‌کنیم. بعد نقطه جدید را

در $f(x) = x + \sqrt[3]{2x} + 1$ صدق می‌دهیم. اگر تساوی برقرار بود، جواب است.

در بین گزینه‌ها فقط **۲** این ویژگی را دارد.

چون نقطه $(4, 7)$ روی $f(x) = x + \sqrt[3]{2x} + 1$ قرار دارد، پس $(7, 4)$ روی f^{-1}

است.

۵۱۷. ۲ برای نوشتن وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ ، جای x و y را عوض

$$x = y^3 - y + 1$$

می‌کنیم:

$$x = y^3 - y + 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} -1 = (-2)^3 - (-2) + 1$$

$$\Rightarrow -1 = -8 + 2 + 1 \Rightarrow -1 = -5$$

$$x = y^3 - y + 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \frac{5}{8} = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1-4+8}{8} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \checkmark$$

پس جواب **۲** است.

۵۱۸. ۲ نقطه $(0, k)$ روی f^{-1} است، پس نقطه $(k, 0)$ روی f است:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x} - \sqrt{x} \Rightarrow 0 = \frac{\lambda}{k} - \sqrt{k} \Rightarrow \frac{\lambda}{k} = \sqrt{k}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda^2}{k^2} = k \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ ، کافی است معادله $f(x) = -2$ را حل کنیم. با توجه به نمودار f ، واضح است که جواب معادله $f(x) = -2$ ، در شاخه $x \geq 0$ است: $f(x) = -2 \Rightarrow -x + 2 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4$

g نیز تابعی خطی است که از دو نقطه $(0, -2)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد، پس معادله آن به صورت $g(x) = -2x - 2$ است؛ بنابراین $g(4) = -2 \times 4 - 2 = -10$ می‌شود. از طرفی برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ ، باید سراغ شاخه $x \leq 0$ برویم: $f(-2) = -2(-2) + 2 = 6$

و برای پیدا کردن $f(6)$ سراغ شاخه $x > 0$ برویم: $f(6) = -6 + 2 = -4$

بنابراین:

$$g(f^{-1}(-2)) + f(f^{-1}(-2)) = g(4) + f(6) = -10 + (-4 + 2) = -14$$

ضابطه بالا -10

۵۲۷. ۳ می‌دانیم $f(f^{-1}(k)) = k$ است.

در ضابطه $f(x) = f^{-1}(3) + 2x - 1$ ، جای تمام x ها، $f^{-1}(3)$ قرار می‌دهیم: $f(f^{-1}(3)) = f^{-1}(3) + 2f^{-1}(3) - 1 \Rightarrow 3 = 3f^{-1}(3) - 1$

$$\Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{4}{3}$$

با جای گذاری $f^{-1}(3) = \frac{4}{3}$ ، ضابطه f این شکلی می‌شود: $f(x) = f^{-1}(3) + 2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{1}{3}$

برای محاسبه $f^{-1}(\frac{25}{3})$ باید جای y ، $\frac{25}{3}$ قرار دهیم: $f(x) = 2x + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{25}{3} = 2x + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

پس: $f^{-1}(\frac{25}{3}) = 4$

۵۲۸. ۳ g وارون f است، پس: $g(6) + g(12) = f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$

برای محاسبه $f^{-1}(6)$ باید در ضابطه $f(x) = x + \sqrt{x}$ جای y ، 6 قرار دهیم: $x + \sqrt{x} = 6 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 4 \Rightarrow f^{-1}(6) = 4$

برای محاسبه $f^{-1}(12)$ باید در ضابطه $f(x) = x + \sqrt{x}$ جای y ، 12 قرار دهیم: $x + \sqrt{x} = 12 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 9 \Rightarrow f^{-1}(12) = 9$

در نتیجه: $f^{-1}(6) + f^{-1}(12) = 4 + 9 = 13$

۵۲۹. ۳ g وارون f است، پس: $g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15)$

برای محاسبه $f^{-1}(3)$ باید در ضابطه $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ جای y ، 3 قرار دهیم: $x + 2\sqrt{x} = 3 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 1 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$

برای محاسبه $f^{-1}(15)$ باید در ضابطه $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ جای y ، 15 قرار دهیم: $x + 2\sqrt{x} = 15 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 9 \Rightarrow f^{-1}(15) = 9$

در نتیجه: $f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$

۵۳۰. ۳ ضابطه f را به کمک اتحاد مربع ساده می‌کنیم: $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$

اگر $x \geq 1$ باشد، برد f همان $D_{f^{-1}}$ ، بازه $[0, +\infty)$ می‌شود.

چون g وارون f است، پس $g(g(1))$ همان $f^{-1}(f^{-1}(1))$ است.

محاسبه $f^{-1}(f^{-1}(1))$ دو مرحله دارد:

اول $f^{-1}(1)$: کافی است معادله $f(x) = 1$ را حل کنیم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| = 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

برای محاسبه $f^{-1}(5)$ باید دنبال نقطه‌ای روی f باشیم که y اش 5 باشد. این نقطه قطعاً روی خطی است که در سمت راست محور y هاست. دو نقطه از این خط را داریم: $(4, 3)$ ، $(0, 2)$

شیب خط را حساب می‌کنیم: $m = \frac{3-2}{4-0} = \frac{1}{4}$

با داشتن شیب و عرض از مبدأ، معادله‌اش را می‌نویسیم: $y = \frac{1}{4}x + 2$

برای محاسبه $f^{-1}(5)$ باید جای y ، 5 قرار دهیم:

$$5 = \frac{1}{4}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{4}x = 3 \Rightarrow x = 12 \xrightarrow{\text{پس}} f^{-1}(5) = 12$$

در نتیجه: $f^{-1}(5) + f^{-1}(0) = 12 + (-2) = 10$

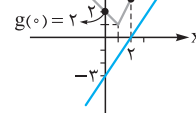
۵۲۴. ۳ در تابع $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & x \geq 3 \\ x + 1 & x < 3 \end{cases}$ فرض می‌کنیم $f(x) = a$

باشد، در این صورت باید $f(a) = -5$ باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر -5 قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای a در صورتی قابل قبول است که در محدوده تعریف ضابطه باشد: $x \geq 3 \Rightarrow 4a + 3 = -5 \Rightarrow a = -2 \times$

$x < 3 \Rightarrow a + 1 = -5 \Rightarrow a = -6 \checkmark$

پس $f^{-1}(-5) = a = -6$

۵۲۵. ۲ برای محاسبه $g(g(0))$ ، از نمودار g کمک می‌گیریم.



با توجه به نمودار $g(0) = 2$ می‌شود، پس $g(g(0))$ به شکل $g(2)$ درمی‌آید که برابر با 3 است.

برای محاسبه $f^{-1}(-2)$ باید ضابطه f را پیدا کنیم. عرض از مبدأ تابع خطی f ، عدد -3 است، پس معادله آن به شکل $y = mx - 3$ است. این خط از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد، پس: $0 = 2m - 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

پس $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$ است. برای محاسبه $f^{-1}(-2)$ ، باید معادله $f(x) = -2$ را حل کنیم: $\frac{3}{2}x - 3 = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

در نتیجه $f^{-1}(-2) = \frac{2}{3}$ ، پس عبارت $g(f^{-1}(-2))$ به شکل $g(\frac{2}{3})$ درمی‌آید. برای محاسبه $g(\frac{2}{3})$ باید ضابطه g به ازای $x \leq 1$ را بنویسیم که یک خط با عرض از مبدأ 2 می‌باشد، پس معادله‌اش به صورت $y = mx + 2$ است. از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد، پس: $1 = m + 2 \Rightarrow m = -1$

بنابراین به ازای $x \leq 1$ ، ضابطه آن به شکل $g(x) = -x + 2$ است و داریم:

$$g(\frac{2}{3}) = \frac{-2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

پس: $g(f^{-1}(-2)) \times g(g(0)) = g(\frac{2}{3}) \times g(2) = \frac{4}{3} \times 3 = 4$

۵۲۶. ۲ اول ضابطه f و g را می‌نویسیم. f در $x \geq 0$ ، خطی است که از دو نقطه $(0, 2)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس معادله آن به صورت $y = -x + 2$ است. در $x \leq 0$ ، f از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-1, 4)$ می‌گذرد، پس معادله آن به صورت $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \geq 0 \\ -2x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$ است. بنابراین:

تا این جا، $f^{-1}(f^{-1}(1))$ به $f^{-1}(4)$ تبدیل شد.

حالا باید $f^{-1}(4)$ را حساب کنیم، کافی است معادله $f(x) = 4$ را حل کنیم:

$$f(x) = 4 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 4 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} - 1 = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = -1 \quad \times \end{cases}$$

پس: $f^{-1}(f^{-1}(1)) = 9$

۵۳۱. ۱ برای محاسبه $g(-\frac{3}{\sqrt{7}})$ یا همان $f^{-1}(-\frac{3}{\sqrt{7}})$ معادله $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ را حل می کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

مخرج کسر $\frac{x}{1+|x|}$ ، همواره مثبت است، پس برای این که حاصل کسر منفی شود، x باید منفی باشد، پس جای $|x|$ ، $-x$ می نویسیم:

$$\frac{x}{1+|x|} = -\frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow 7x = -3 + 3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

برای محاسبه $g(\frac{5}{9})$ یا همان $f^{-1}(\frac{5}{9})$ معادله $f(x) = \frac{5}{9}$ را حل می کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{5}{9}$$

مخرج کسر $\frac{x}{1+|x|}$ ، همواره مثبت است، پس برای این که حاصل کسر مثبت شود، x نیز باید مثبت باشد، پس جای $|x|$ ، x می نویسیم:

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9x = 5 + 5x \Rightarrow 4x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

جواب برابر $\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = g(\frac{5}{9}) + g(-\frac{3}{\sqrt{7}})$ می شود.

۵۳۲. ۲ g ، قرینه f نسبت به خط $y = x$ است، پس g ، وارون f است.

برای محاسبه $g(48)$ و $g(15)$ یا همان $f^{-1}(48)$ و $f^{-1}(15)$ باید به ترتیب معادله های $f(x) = 48$ و $f(x) = 15$ را حل کنیم.

$$f(x) = 48 \Rightarrow 4^x + 2^{x+1} = 48$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 + 2(2^x) - 48 = 0 \Rightarrow (2^x + 8)(2^x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = -8 \quad \times \\ 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6 \Rightarrow g(48) = \log_2 6 \end{cases}$$

$$f(x) = 15 \Rightarrow 4^x + 2^{x+1} = 15 \Rightarrow (2^x)^2 + 2(2^x) - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x + 5)(2^x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = -5 \\ 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \Rightarrow g(15) = \log_2 3 \end{cases}$$

حالا از خاصیت $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$ استفاده می کنیم:

$$g(48) + g(15) = \log_2 6 + \log_2 3 = \log_2 18$$

۵۳۳. ۴ برای به دست آوردن $f^{-1}(2)$ باید در ضابطه اصلی، جای y ، ۲ قرار دهیم:

$$f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{2^x + \frac{1}{2^x}}{2} \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4$$

با فرض $2^x = t$ ، معادله را حل می کنیم:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{+3} t^2 - 4t + 4 = 3 \Rightarrow (t-2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow t-2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

حالا جای t ، 2^x قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم:

$$t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3}$$

نمایش لگاریتمی $x = \log_2(2 + \sqrt{3})$

$$t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3}$$

نمایش لگاریتمی $x = \log_2(2 - \sqrt{3})$

دامنه f ، همان برد f^{-1} است: $R_{f^{-1}} = D_f = [0, +\infty)$

پس بین دو مقدار به دست آمده $\log_2(2 - \sqrt{3})$ قبول نیست، چون عددی منفی است و فقط جواب اول قبول است:

$$x = \log_2(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{3})$$

۵۳۴. ۳ **خاطره:** تساوی $A^B = C$ را می توانیم به شکل $\log_A C = B$ بنویسیم.

۵۳۴. ۳ برای به دست آوردن $f^{-1}(2)$ باید در ضابطه اصلی، جای y ، ۲ قرار دهیم:

$$f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{2} \Rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 4$$

با فرض $2^x = t$ ، معادله را حل می کنیم:

$$t - \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 4t - 1 = 0 \xrightarrow{+5} t^2 - 4t + 4 = 5$$

$$\Rightarrow (t-2)^2 = 5 \Rightarrow t-2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{5}$$

عدد $2 - \sqrt{5}$ ، عددی منفی است و نمی تواند با 2^x برابر باشد.

پس فقط $t = 2 + \sqrt{5}$ قبول است:

$$2^x = t \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \xrightarrow{\text{نمایش لگاریتمی}} x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

۵۳۵. ۴ فرض کنیم مختصات نقطه برخورد f^{-1} و نیمساز ناحیه دوم به صورت $A(a, -a)$ است.

دقت کنید چون در ناحیه دوم، x ها منفی هستند، پس باید $a < 0$ باشد.

پس نقطه $A(a, -a)$ روی f^{-1} است و در نتیجه نقطه $A'(-a, a)$ روی f است:

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} \xrightarrow{(-a, a)} a = -a - \frac{1}{2(-a)}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{1}{2a} \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{2}$$

طول نقطه A ، همان a بود: $x_A = -\frac{1}{2}$

۵۳۶. ۲ فرض کنیم مختصات نقطه برخورد f^{-1} و نیمساز ناحیه چهارم به صورت $A(a, -a)$ است.

دقت کنید چون در ناحیه چهارم، x ها مثبت هستند، پس باید $a > 0$ باشد.

پس نقطه $A(a, -a)$ روی f^{-1} است و در نتیجه نقطه $A'(-a, a)$ روی f است:

$$f(x) = x - \frac{2}{x} \xrightarrow{(-a, a)} a = -a - \frac{2}{-a}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

طول نقطه A ، همان a بود: $x_A = 1$



۵۴۳. ۲ طول نقطه‌ای به عرض $7/2$ روی خط $5y - 10x = 12$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{5(7/2)}{36} - 10x = 12 \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = 2/4$$

پس f^{-1} از نقطه $A(2/4, 7/2)$ می‌گذرد، در نتیجه f از نقطه $(7/2, 2/4)$ می‌گذرد:

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx - 1}$$

$$\frac{f(7/2) = 2/4}{2/4} \rightarrow 2/4 = \sqrt{7/2} \times \sqrt{7/2 m - 1}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times (7/2 m - 1)$$

$$\Rightarrow 0/8 = 7/2 m - 1 \Rightarrow 7/2 m = 1/8 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4}x - 1}$ می‌شود. مقدار $f(\frac{4}{m})$ می‌خواهیم:

$$f(\frac{4}{m}) = f(\frac{1}{1/4}) = f(4) = \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{1}{4}(4) - 1} = 4\sqrt{3}$$

۵۴۴. ۴ مختصات پارامتری هر نقطه‌ای روی خط $y = x - 8$ ، به صورت $A(a, a - 8)$ است. این نقطه باید روی f^{-1} باشد، پس نقطه $(a - 8, a)$ باید روی f باشد.

$$f(x) = x^2 + x \xrightarrow{(a-8, a)} a = (a-8)^2 + a - 8$$

$$\Rightarrow 8 = (a-8)^2 \xrightarrow{\text{فرجه}} 2 = a - 8 \Rightarrow a = 10$$

با جای گذاری $a = 10$ ، مختصات A به صورت $(10, 2)$ درمی‌آید، پس:

$$\frac{x_A}{y_A} = \frac{10}{2} = 5$$

۵۴۵. ۲ g تابعی اکیداً صعودی با برد $\mathbb{R}$ است، پس معادله $g(x) = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

فرض کنید ریشه این معادله α باشد، پس $g(\alpha) = 0$ که نتیجه می‌دهد $g^{-1}(0) = \alpha$.

حالا دقت کنید چون معادله $g(x) = 0$ فقط یک ریشه (آن هم α) دارد، پس اگر $g(\text{cloud}) = 0$ باشد، $\text{cloud} = \alpha$ می‌شود، بنابراین:

$$g(f(g(x))) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = \alpha (*)$$

$$f(g(x)) = \alpha$$

معادله $g(f(g(x))) = 0$ فقط یک جواب دارد، پس معادله $f(g(x)) = \alpha$ هم فقط دارای یک جواب است.

از طرفی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ است، پس $f(g(x)) = g^2(x) - 6g(x) + 2 = \alpha$

$$g^2(x) - 6g(x) + 2 = \alpha$$

می‌شود. با جای گذاری در (*) داریم:

$$\Rightarrow \overset{a}{1}g^2(x) - \overset{b}{6}g(x) + \overset{c}{2} - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 1g^2(x) - 6g(x) + 2 - \alpha = 0$$

این معادله فقط یک جواب دارد، پس دلتای آن برابر صفر است:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (2 - \alpha) = 0 \Rightarrow 36 - 8 + 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 4\alpha = -28 \Rightarrow \alpha = -7$$

بنابراین $g^{-1}(0) = \alpha = -7$ می‌شود.

۵۴۶. ۳ تابع $y = x^3$ را می‌کشیم:

$$y = x^3$$

$$y = |x^3|$$

برای رسم $y = |x^3|$ کافی است قسمت‌های زیر

محور x ها را بالا بیاوریم:

$$y = |x^3|$$

واضح است که تابع یک‌به‌یک نیست پس وارون‌پذیر نیست.

۵۳۷. ۴ هر دو رابطه $f^{-1}(5) = 3$ و $g^{-1}(a) = 1$ را به حالت نرمال می‌نویسیم:

$$f^{-1}(5) = 3 \Rightarrow f(3) = 5$$

$$g^{-1}(a) = 1 \Rightarrow g(1) = a$$

حالا در تساوی $g(x) = 2f(2x+1) + 1$ را قرار می‌دهیم:

$$g(1) = 2f(3) + 1 \Rightarrow a = 2(5) + 1 \Rightarrow a = 11$$

۵۳۸. ۴ از $f^{-1}(2) = 0$ نتیجه می‌گیریم $f(0) = 2$. برای آن‌که

$$f(\frac{1}{2}x - 1) = f(0) = 2$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس در رابطه $f(\frac{1}{2}x - 1) = g(2x) - x$ جای تمام x ها، ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(0) = g(4) - 2 \Rightarrow g(4) = 4$$

۵۳۹. ۴ وقتی وارون تابع $y = 1 + 2f(x+3)$ از نقطه $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ می‌گذرد:

$$\frac{5}{2} = 1 + 2f(-\frac{5}{2} + 3) \Rightarrow \frac{3}{2} = 2f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{2} = 1 + 2f(-\frac{5}{2} + 3) \Rightarrow \frac{3}{2} = 2f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

برای پیدا کردن نقطه برخورد تابع $y = 1 - 2f^{-1}(x-3)$ با محور x ها باید $y = 0$ قرار دهیم:

$$0 = 1 - 2f^{-1}(x-3) \Rightarrow f^{-1}(x-3) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = x - 3$$

$$x - 3 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 3 \frac{3}{4}$$

۵۴۰. ۴ فرض می‌کنیم $g^{-1}(16) = b$ پس $g(b) = 16$. حالا در

$$g(b) = f(3b-4) \Rightarrow 16 = f(3b-4)$$

$$f(3b-4) = 16 \Rightarrow 3b-4 = 20 \Rightarrow b = 8$$

ما دنبال b یا همان $g^{-1}(16)$ بودیم:

$$g^{-1}(16) = 8$$

۵۴۱. ۲ فرض می‌کنیم $g^{-1}(6) = b$ پس $g(b) = 6$. حالا در

$$g(b) = f(b) + \sqrt{f(b)} \Rightarrow 6 = f(b) + \sqrt{f(b)}$$

$$f(b) = 4 \Rightarrow b = f^{-1}(4)$$

$$b = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{2(4)} = 2$$

$$g^{-1}(6) = 2$$

۵۴۲. ۴ طول نقطه‌ای به عرض 10 را روی خط $y = 12 - x$ پیدا می‌کنیم:

$$10 = 12 - x \Rightarrow x = 2$$

پس f^{-1} از نقطه $A(2, 10)$ می‌گذرد، در نتیجه f از نقطه $(10, 2)$ می‌گذرد:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{mx-1} \xrightarrow{f(10)=2} 2 = \sqrt{10-2} \sqrt{10m-1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}} \rightarrow 2 = \sqrt{10m-1} \Rightarrow 10m-1 = 9 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{x-1}$ می‌شود. مقدار $f(m+4)$ می‌خواهیم:

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

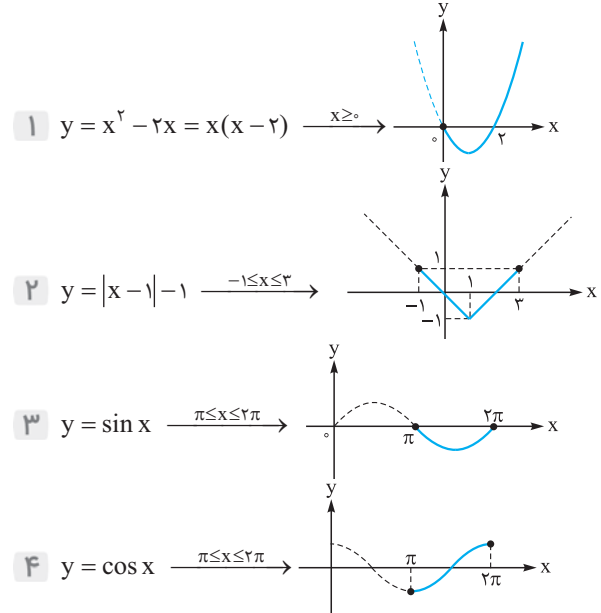
$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{5-1} = \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

۵۴۷. **۴** وقتی می‌نویسیم $f: A \rightarrow B$ ، یعنی دامنه تابع f ، مجموعه A است. هر f تابع داده شده را در دامنه‌شان رسم می‌کنیم:



در بین f نمودار رسم شده، فقط **۴** یک‌به‌یک و در نتیجه وارون پذیر است.

۵۴۸. **۲** دوتا تابع خطی داریم که وارونش خودش می‌شود:

۱) $y = x$ و ۲) $y = -x + h$

چون سؤال گفته f غیرهمانی است، پس حالت (۲) قبول است: $f(x) = -x + h$
تابع $f + g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + h$$

طول رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(\frac{1}{2})} = -1$$

پس $f + g$ در بازه‌های $[1, +\infty)$ یا $(-\infty, 1]$ یک‌به‌یک (وارون پذیر) است.

۵۴۹. **۴** اگر از $\sqrt{x}$ فاکتور بگیریم، ضابطه این شکلی می‌شود:

$$f(x) = a^2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(a^2 - \sqrt{x})$$

ریشه‌های f را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x}(a^2 - \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sqrt{x} = a^2 \Rightarrow x = a^4 \end{cases}$$

تابعی که بیش از یک ریشه داشته باشد، قطعاً یک‌به‌یک نیست (وارون پذیر نیست)، پس در این‌جا باید صفر و a^4 برابر باشند: $a^4 = 0 \Rightarrow a = 0$

با جای‌گذاری $a = 0$ ، ضابطه $f(x) = a^2\sqrt{x} - x$ به شکل $f(x) = -x$ درمی‌آید که وارونش هم خودش می‌شود:

$$f^{-1}(x) = -x$$

پس:

۵۵۰. **۱** با توجه به علامت a ، نمودار ضابطه $y = x^2 + a$ با دامنه $x \geq 0$ به یکی از سه شکل روبه‌رو است:

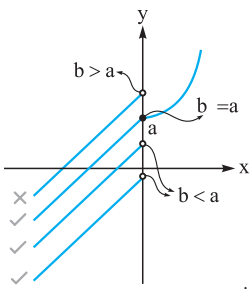
ضابطه دوم خط $y = ax + b$ است. اگر شیب خط منفی باشد ($a < 0$)، تابع قطعاً یک‌به‌یک نیست، چون خطی موازی محور x ها پیدا می‌شود که ضابطه اول و این خط را در ۲ نقطه قطع کند. از طرفی a نباید صفر باشد، چون ضابطه دوم خطی افقی می‌شود. پس باید $a > 0$ باشد. در نتیجه تکلیف ضابطه اول هم معلوم شد:

برای رسم ضابطه دوم، باید حواسمان به b (یعنی عرض از مبدأ خط) باشد.

با توجه به مثبت بودن a (شیب خط)، برای b (عرض از مبدأ) چند حالت داریم:

در حالت $b = a$ یا $b < a$ ، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

پس برای وارون پذیر بودن (یا همان یک‌به‌یک بودن)، نمودار f فقط از ناحیه ۴ نمی‌گذرد. در نتیجه f^{-1} فقط از ناحیه ۲ نمی‌گذرد.



۵۵۱. **۱** ابتدا محدوده دامنه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \\ 2x - 5 < 0 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

پس می‌توانیم ضابطه f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & x \geq \frac{5}{2} \\ -2x^2 + ax - 21 & x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

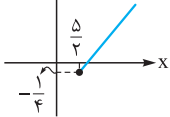
سهمی $y = -2x^2 + ax - 21$ در بازه‌ای وارون پذیر است که طول رأس در آن بازه نباشد. طول رأس این سهمی $\frac{a}{4} = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{4}$ است.

سهمی در بازه $x < \frac{5}{2}$ وارون پذیر است اگر $\frac{a}{4}$ در این بازه نباشد. به عبارت دیگر

$\frac{a}{4}$ نباید عضو بازه $(-\infty, \frac{5}{2})$ باشد، پس $\frac{a}{4}$ عضو بازه $[\frac{5}{2}, +\infty)$ می‌شود:

$$\frac{a}{4} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow a \geq 10$$

خط $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ با شرط $x \geq \frac{5}{2}$ را رسم می‌کنیم:



پس حداقل مقدار ضابطه $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ، برابر $-\frac{1}{4}$ است.

حالا علاوه بر این که طول رأس سهمی نباید در بازه $x < \frac{5}{2}$ باشد، برای این که f وارون پذیر شود، حداکثر مقدار $-2x^2 + ax - 21$ ، باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ باشد، رأس سهمی در بازه $x < \frac{5}{2}$ نیست. پس حداکثر مقدار $-2x^2 + ax - 21$ به ازای $x = \frac{5}{2}$ رخ می‌دهد.

(دلیلش این‌که توی بازه $x \geq \frac{5}{2}$ که یه دونه فقط داریم و رسمش کردیم، بالا فزاینده سهمی منفیه پس سهمی رو به پایین می‌شه ولی ما نمودار سهمی رو توی

$x < \frac{5}{2}$ می‌فواهیم. از طرفی دیدیم که رأس سهمی نباید توی $x < \frac{5}{2}$ باشه، پس طبیعتاً نمودار سهمی توی $x < \frac{5}{2}$ به شکل روبه‌رو می‌شه:

پس بیشترین مقدار سهمی رو توی $x = \frac{5}{2}$ داریم. حالا برای این که f یک‌به‌یک بشه، این بیشترین مقدار، باید از کم‌ترین مقدار ضابطه $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ کم‌تر یا مساوی بشه که شکل نمودار به یکی از شکل‌های مقابل باشه تا f وارون پذیر بشه: (باید یکی از سهمی‌های سمت چپ رو داشته باشیم.)

مقدار سهمی در $x = \frac{5}{2}$ را حساب می‌کنیم:

$$y = -2x^2 + ax - 21$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

$$\frac{x=5}{2} \rightarrow y = -\frac{25}{2} + \frac{5a}{2} - 21 = \frac{5a}{2} - \frac{67}{2}$$

رأس سهمی در بازه $x > -\frac{3}{4}$ نیست، پس حداکثر مقدار $x^2 + 2mx - 2$ به ازای $x = -\frac{3}{4}$ رخ می‌دهد.

دلیلش اینست که توی بازه $x \leq -\frac{3}{4}$ که یه دونه خط داریم و رسمش کردیم، حالا ضریب

x^2 سهمی منقبضه پس سهمی رو به پایین می‌شه ولی ما نمودار سهمی رو توی $x > -\frac{3}{4}$ می‌فواهیم. از طرفی دیدیم رأس سهمی نباید توی $x > -\frac{3}{4}$ باشه. پس طبیعتاً نمودار سهمی توی $x > -\frac{3}{4}$ به شکل روبه‌رو می‌شه:

پس بیشترین مقدار سهمی رو توی $x = -\frac{3}{4}$ داریم. برای این‌که f یک‌به‌یک بشه، این بیشترین مقدار، باید از کم‌ترین مقدار ضابطه $2 - 3x$ کم‌تر یا مساویش بشه که شکل نمودار به یکی از شکل‌های مقابل بشه تا f وارون‌پذیر باشه؛ (باید یکی از سهمی‌های سمت راست رو داشته باشیم).

این مقدار باید کوچک‌تر از $\frac{13}{4}$ ، یعنی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد:

$$-3m - \frac{1}{4} \leq \frac{13}{4} \xrightarrow{\times(-1)} 3m + \frac{1}{4} \geq -\frac{13}{4} \Rightarrow 3m \geq -\frac{13}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow 3m \geq -\frac{14}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{7}{2}$$

با توجه به $m \leq -\frac{3}{4}$ و $m \geq -\frac{7}{2}$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{4}$ یا $-\frac{1}{5} \leq m \leq -\frac{2}{5}$ است. پس تنها مقدار صحیح m برابر -2 است که به

ازای آن، ضابطه f به شکل زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{4} \\ 2 - 4x - x^2 & x > -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$f^{-1}(-19)$ را می‌خواهیم، پس کافی است معادله $f(x) = -19$ را حل کنیم. واضح است که $2 - 3x$ نمی‌تواند برابر -19 باشد (با توجه به نمودار آن)، پس $2 - 4x - x^2$ باید برابر -19 شود:

$$2 - 4x - x^2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

دامنه این ضابطه $x > -\frac{3}{4}$ است، پس فقط 3 قبول است و در نتیجه:

$$f^{-1}(-19) = 3$$

۵۵۳. اول باید تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ را رسم کنیم.

باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را 2 واحد به راست و 1 واحد به بالا ببریم:



الان کافی است نمودار بالا را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم تا به نمودار f^{-1} برسیم:



این مقدار باید کوچک‌تر یا مساوی $-\frac{1}{4}$ ، یعنی حداقل مقدار $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ باشد:

$$\frac{5a}{2} - \frac{67}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5a}{2} \leq \frac{67}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5a}{2} \leq \frac{133}{4} \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} a \leq \frac{133}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{133}{25} = 5.32$$

از $a \geq 10$ و $a \leq 133/25$ ، نتیجه می‌گیریم بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر 13 است و ضابطه f به شکل زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} & x \geq \frac{5}{4} \\ -2x^2 + 13x - 21 & x < \frac{5}{4} \end{cases}$$

$f^{-1}(-3)$ را می‌خواهیم، پس کافی است معادله $f(x) = -3$ را حل کنیم.

واضح است که $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ نمی‌تواند برابر -3 باشد (با توجه به نمودار آن که رسم شده، مقادیرش از $-\frac{1}{4}$ به بالا بود)، پس $-2x^2 + 13x - 21 = -3$ باید برابر -3 شود:

$$-2x^2 + 13x - 21 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

معادله بالا را با روش روسی حل می‌کنیم:

$$2x^2 - 13x + 18 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب}} x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 4x - 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله $2x^2 - 13x + 18 = 0$ ، $x = \frac{4}{2} = 2$ و $x = \frac{9}{2} = 4.5$ است. حالا جواب $\frac{9}{2}$ قابل قبول نیست (چون شرط $x < \frac{5}{4}$ را داریم)، پس $f^{-1}(-3) = 2$ می‌شود.

۵۵۲. ابتدا محدوده دامنه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x + 3 \leq 0 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \\ 2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

پس می‌توانیم ضابطه f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \\ 2 + 2mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

سهمی $x^2 + 2mx + 2$ (یا همان $-x^2 + 2mx + 2$) در بازه‌ای وارون‌پذیر است که طول رأس سهمی در آن بازه نباشد. طول رأس این سهمی $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{2} = -m$ است. سهمی در بازه $x > -\frac{3}{2}$ وارون‌پذیر است. اگر m

در این بازه نباشد، m نباید عضو بازه $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ باشد، پس m عضو بازه

$$m \leq -\frac{3}{2} \quad \text{یعنی: } (-\infty, -\frac{3}{2}]$$

خط $2 - 3x$ با شرط $x \leq -\frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم:

پس حداقل مقدار ضابطه $2 - 3x$ برابر $\frac{13}{2}$ است.

حالا علاوه بر این که طول رأس سهمی نباید در بازه

$x > -\frac{3}{2}$ باشد، برای این‌که f وارون‌پذیر شود، حداکثر

مقدار $x^2 + 2mx + 2$ ، باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد.

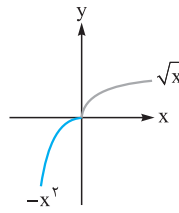
مقدار $x^2 + 2mx + 2$ باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد.

مقدار $x^2 + 2mx + 2$ باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد.

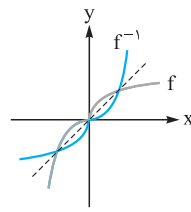
مقدار $x^2 + 2mx + 2$ باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد.

مقدار $x^2 + 2mx + 2$ باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $2 - 3x$ باشد.

۵۵۴. ۳ اول نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم.



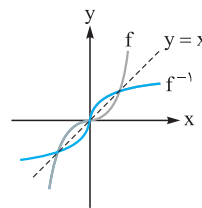
حالا نمودار بالا را نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید:



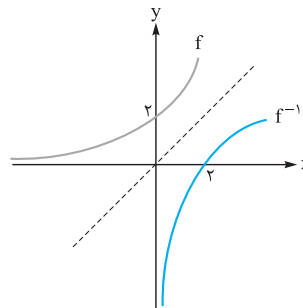
۵۵۵. ۳ تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا f را رسم می‌کنیم. بعد نمودارش را نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم تا f^{-1} به دست آید:

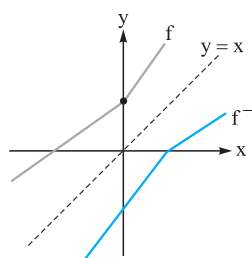


۵۵۶. ۴ نمودار تابع $f(x)$ را

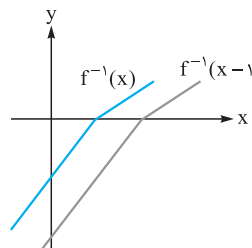


داریم. نمودار تابع $f^{-1}(x)$ قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ است، حالا دامنه تابع $\sqrt{f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $f^{-1}(x) \geq 0$ باشد (یعنی f^{-1} بالای محور x باشد) که می‌شود $x \geq 2$.

۵۵۷. ۲ برای رسم $f^{-1}(x)$ باید $f(x)$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه کنیم:



حالا آن را ۱ واحد به راست می‌بریم تا به $f^{-1}(x-1)$ برسیم:

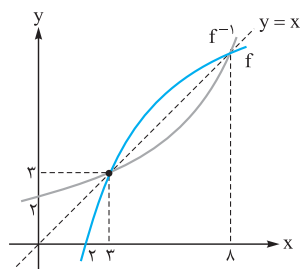


نمودار نهایی از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

۵۵۸. ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌گذاریم:

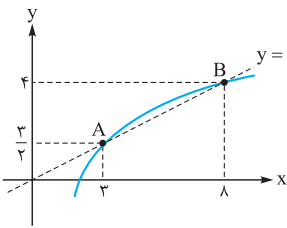
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

نمودار f^{-1} را می‌کشیم:



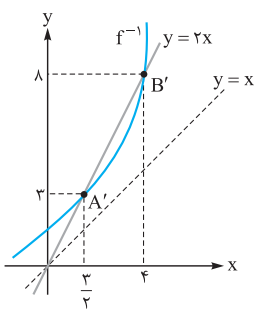
نامعادله $x \geq f^{-1}(x)$ ، یعنی کجاها، تابع $y = x$ بالاتر از $y = f^{-1}(x)$ است؟ روی نمودار به ازای $3 \leq x \leq 8$ ، نیمساز ربع اول و سوم بالاتر از f^{-1} است، پس جواب همین است: $[3, 8]$

۵۵۹. ۲ با توجه به این که طول



نقاط تقاطع $f(x)$ و $y = \frac{1}{2}x$ را داریم $(x=8, x=3)$ با کمک خط $y = \frac{1}{2}x$ عرضشان را هم می‌توانیم پیدا کنیم (به ترتیب $\frac{3}{2}, 4$).

ضابطه وارون خط $y = \frac{1}{2}x$ به شکل $y = 2x$ است.



پس اگر خط $y = \frac{1}{2}x$ و تابع f که در شکل رسم شده‌اند را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه کنیم به خط $y = 2x$ و تابع f^{-1} می‌رسیم:

تابع $g(x) = \sqrt{2x - f^{-1}(x)}$ یک تابع رادیکالی است. برای دامنه‌اش باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$2x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \leq 2x$$

جواب نامعادله $f^{-1}(x) \leq 2x$ بازه‌هایی است که $y = 2x$ بالاتر از $y = f^{-1}(x)$ است که طبق شکل، بازه $[\frac{3}{2}, 4]$ می‌باشد.

۵۶۰. ۳ راه اول: برای پیدا کردن تابع معکوس تابع $f(x) = 2x + 4$ با دامنه $[-1, 3]$ اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که قبلاً گفتیم، داریم:

$$y = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{2}$$

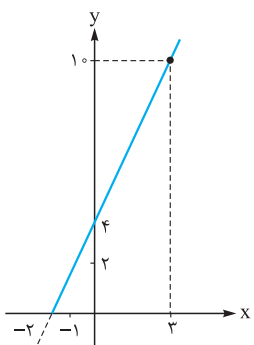
$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

و ثانیاً در مورد دامنه f^{-1} هم می‌دانیم که دامنه f^{-1} همان برد f است، پس باید برد تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + 4$ و دامنه $[-1, 3]$ را پیدا کنیم:

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow 2 \leq 2x + 4 \leq 10 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 10$$

پس برد f برابر بازه $[2, 10]$ و در نتیجه دامنه f^{-1} هم برابر بازه $[2, 10]$ است،

پس تابع معکوس f می‌شود: $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$ ، $2 \leq x \leq 10$.



راه دوم: بعد از پیدا کردن ضابطه تابع وارون یعنی $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$ برای پیدا کردن دامنه f^{-1} می‌توانیم نمودار تابع f را رسم و برد f را تعیین کنیم:

$$f(x) = 2x + 4, x \in [-1, 3]$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (-1, 2)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (3, 10)$$

حالا با توجه به نمودار، برد تابع f برابر است با

$[2, 10]$ ، پس دامنه f^{-1} هم می‌شود $2 \leq x \leq 10$.

۵۶۱. ۱ وقتی سؤال می‌گویند تابعی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ قرینه کنید یعنی وارونش را می‌خواهد.

در ضابطه $3y - 2x = 4$ ، جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$2y = 3x - 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

بعد y را برحسب x می‌نویسیم:

عرض از مبدا

دو تساوی داده شده را با f و f^{-1} به دست آمده می نویسیم (از $f(0) \neq 0$ نتیجه می گیریم $b \neq 0$).

$$f^{-1}(0) = f(0) \Rightarrow -\frac{b}{a} = b \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} -\frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$f^{-1}(x) = -x + b$$
 تا این جا داریم:

$$f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow -2 + b = 7 \Rightarrow b = 9$$

$$f(x) = -x + 9 \Rightarrow f(4) = -4 + 9 = 5$$
 پس:

۵۶۶. ابتدا ضابطه وارون f را به دست می آوریم.

$$2y = x - 3 \Rightarrow x = 2y + 3$$

$$y = 2x + 3$$
 حالا جای x و y را عوض می کنیم:

پس ضابطه وارون به صورت $y = 2x + 3$ شد.

اگر این تابع را ۶ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، تابع $y = 2x + 3 - 6 = 2x - 3$ حاصل می شود. طول نقطه تلاقی منحنی حاصل (یعنی $y = 2x - 3$) با نمودار f

(یعنی $f(x) = \frac{x-3}{2}$) را به دست می آوریم:

$$2x - 3 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow 4x - 6 = x - 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

برای به دست آوردن عرض نقطه تقاطع، کافی است $x = 1$ را در یکی از منحنی ها (مثلاً f) جای گذاری کنیم:

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1-3}{2} = -1$$

بنابراین مختصات نقطه تقاطع به صورت $A(1, -1)$ است که فاصله آن از مبدأ

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$
 مختصات برابر است با:

۵۶۷. ضابطه f را ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = \frac{(x-3)(2x-1)}{x-3} \Rightarrow f(x) = 2x-1, x \neq 3$$

ضابطه ساده شده f به ازای $x = 3$ ، عدد ۵ را تولید می کند، پس برد f نباید

شامل عدد ۵ باشد: $R_f = \mathbb{R} - \{5\}$

ضابطه وارون f را حساب می کنیم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \xrightarrow{\text{عوض کردن جای } y, x} y = \frac{x+1}{2}$$

از آنجایی که دامنه f^{-1} همان برد f است، پس دامنه f^{-1} هم نباید شامل عدد ۵ باشد، پس $x - 5$ را در صورت و مخرج آن ضرب می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{2(x-5)} = \frac{x^2 - 4x - 5}{2x - 10}$$

$$b + c + d = -4 + (-5) + (-10) = -19$$
 پس:

۵۶۸. راه اول: مثل همیشه برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون، x را

برحسب y پیدا می کنیم و سپس جای x و y را عوض می کنیم:

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow xy - y = 1 \Rightarrow xy = y + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$$

و چون $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$ پس $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

۵۶۹. در درس نامه دیدیم وارون تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$

است، پس:

$$f(x) = \frac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 \cdot x + 1}{1 \cdot x - 0} = \frac{x+1}{x}$$

۵۶۲. ۲. راه اول: در درس نامه داشتیم اگر f یک تابع خطی باشد، f و وارون f

در دو صورت بر هم منطبق اند:

الف) $f(x) = x$ باشد.

ب) $f(x) = -x + b$ باشد (چون خط $y = -x + b$ بر نیمساز ناحیه اول

و سوم عمود است و قرینه اش به نیمساز می شود خودش). پس حالا که داریم

$f(x) = ax + 1$ باید $a = -1$ باشد.

۵۶۳. ۲. راه دوم: وارون تابع f را پیدا می کنیم:

$$y = ax + 1 \Rightarrow ax = y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{1}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y, x} y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$$

حالا دو خط $y = ax + 1$ و $y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$ باید بر هم منطبق باشند، پس باید:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = a \\ -\frac{1}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

۵۶۳. ۲. ضابطه اول را استاندارد می نویسیم:

$$ax + by = 8 \Rightarrow by = -ax + 8 \xrightarrow{\div b} y = -\frac{a}{b}x + \frac{8}{b}$$

چون دو خط نسبت به نیمساز ناحیه اول متقارن اند، پس یکی از آن ها وارون دیگری است.

وارون خط دوم یعنی $2x - 3y = b$ را پیدا می کنیم و با خط بالا برابر قرار

$$2x = 3y + b \xrightarrow{\div 2} x = \frac{3}{2}y + \frac{b}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y, x} y = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2}$$

دو ضابطه را برابر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{2} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{-a}{b} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار a, b را حساب می کنیم:

$$1) \frac{-a}{b} = \frac{3}{2} \xrightarrow{b=4} a = -6 \Rightarrow a + b = -2$$

$$2) \frac{-a}{b} = \frac{3}{2} \xrightarrow{b=-4} a = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

$$a + b = \pm 2$$

پس:

۵۶۴. ۲. نقطه $A(4-a, a)$ روی f و f^{-1} است.

از این که $A(4-a, a)$ روی f^{-1} است، پس $A'(a, 4-a)$ روی f است.

دو نقطه از f را داریم:

$$A'(a, 4-a), A(4-a, a)$$

شیب خط را حساب می کنیم:

$$m_{AA'} = \frac{a - (4-a)}{(4-a) - a} = -1$$

پس ضابطه به شکل $y = -x + b$ است. نقطه $A(4-a, a)$ روی آن است:

$$a = -4 + a + b \Rightarrow b = 4$$

در نتیجه ضابطه f به شکل $y = -x + 4$ است.

خطی که شیبش ۱- است، وارونش خودش می شود:

$$f^{-1}: y = -x + 4$$

معادله خط را به فرم کلی می نویسیم:

$$\frac{|0 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

فاصله $(0, 0)$ از خط بالا برابر است با:

۵۶۵. ۲. ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ را می نویسیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن جای } y, x} y = \frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

۵۶۹. ۲ از درس‌نامه یادمان هست که تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی وارون

خودش است که $a = -d$ ، در تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+b}$ باید $b = -2$ باشد، پس

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2} \text{ است و در نتیجه } f(0) = -\frac{3}{2}$$

۵۷۰. ۲ برای وارون تابع هموگرافیک فرمول گفتیم:

$$f(x) = \frac{1x+4}{1x-2} \xrightarrow[\text{و قرینه می‌کنیم}]{\text{جای } 1 \text{ و } -2 \text{ عوض}} f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{1x-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

حالا f را با f^{-1} برابر می‌گذاریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, 4$$

۵۷۱. ۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+k} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-kx+3}{x-2}$$

حالا f و f^{-1} را قطع می‌دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+3}{x+k} = \frac{-kx+3}{x-2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 3x - 6 = -kx^2 + 3x - k^2x + 3k$$

$$\Rightarrow (k+2)x^2 + (k^2-4)x + (-6-3k) = 0$$

حاصل جمع ریشه‌های معادله به دست آمده، ۱ است:

$$S=1 \Rightarrow -\frac{b}{a}=1 \Rightarrow b=-a \Rightarrow k^2-4=-k-2$$

$$\Rightarrow k^2+k-2=0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \checkmark \\ k=-2 \times \end{cases}$$

در حالت $k = -2$ ، f و f^{-1} بر هم منطبق می‌شوند.

۵۷۲. ۲ تغییرات را مرحله‌به‌مرحله روی f انجام می‌دهیم:

$$y = \frac{2x+3}{x-4} \xrightarrow[\text{x به x-a}]{\text{a واحد راست}} y = \frac{2(x-a)+3}{(x-a)-4} = \frac{2x-2a+3}{x-a-4}$$

$$\xrightarrow[\text{x-a-4}]{\text{2a واحد بالا}} y = \frac{2x-2a+3}{x-a-4} + 2a = \frac{2x-2a+3+2ax-2a^2-8a}{x-a-4}$$

$$= \frac{(2+2a)x + (-2a^2-10a+3)}{x+(-a-4)}$$

ضابطه g به صورت زیر شد:

$$g(x) = \frac{\overbrace{(2+2a)}^A x + (-2a^2-10a+3)}{x + \underbrace{(-a-4)}_D}$$

برای آن که g و g^{-1} یکسان باشند باید A و D قرینه هم باشند:

$$A = -D \Rightarrow 2+2a = a+4 \Rightarrow a = 2$$

۵۷۳. ۲ راه اول: برد $\sqrt{x+3}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است،

پس دامنه f^{-1} باید $x \geq 0$ باشد. به ازای $x = 1$ داریم $y = 2$. پس در وارون آن نقطه $(2, 1)$ صدق می‌کند و جواب می‌شود ۲.

راه دوم: ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}: y = \sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x+3$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 3 \xrightarrow[\text{عوض کردن x}]{y} y = x^2 - 3$$

برای به دست آوردن $D_{f^{-1}}$ ، برد $f(x) = \sqrt{x+3}$

را از روی نمودارش حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

۵۷۴. ۱ راه اول: اول برد تابع اولیه که همان

دامنه تابع وارون است را حساب می‌کنیم:

با توجه به نمودار داریم:

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

حالا می‌رویم سراغ ضابطه، x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2-y \xrightarrow{\text{توان } 2} x-1 = (2-y)^2$$

$$x-1 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

$$y = x^2 - 4x + 5$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

پس ضابطه وارون $y = x^2 - 4x + 5$ و دامنه‌اش $(-\infty, 2]$ است.

راه دوم: نقطه $A(5, 0)$ روی f است، پس باید دنبال گزینه‌ای باشیم که نقطه

$A'(0, 5)$ روی آن است. تنها گزینه‌ای که A' در آن صدق می‌کند، ۱

است. دقت کنید در ۳، $x = 0$ در دامنه نیست.

۵۷۵. ۳ مرحله‌به‌مرحله، کارهای خواسته‌شده را انجام می‌دهیم.

۱) قرینه یک تابع نسبت به خط $y = x$ ، تابع وارون آن می‌شود.

برای به دست آوردن وارون تابع $y = \sqrt{x-1} + 2$ ، ابتدا x را تنها می‌کنیم، بعد جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\sqrt{x-1} = y-2 \xrightarrow{\text{توان } 2} x-1 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{عوض کردن x}]{y, x} y = (x-2)^2 + 1$$

۲) نمودار به دست آمده را ۲ واحد به راست می‌بریم. باید جای x ها، $x-2$ قرار

$$y = (x-2-2)^2 + 1 \Rightarrow y = (x-4)^2 + 1$$

دهیم:

۳) در آخر تابع را ۳ واحد به پایین می‌بریم:

$$y = (x-4)^2 + 1 - 3 \Rightarrow y = (x-4)^2 - 2$$

مقدار تابع به دست آمده را به ازای $x = 4$ ، حساب می‌کنیم:

$$g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = 0 - 2 = -2$$

۵۷۶. ۳ احتمالاً طراح منظور k واحد به بالا و $k-2$ واحد به راست بوده!

چون اگر این موضوع را ندانیم، در ۴ حالت مختلف باید سؤال را حل کنیم!

$$y = \sqrt{4-x} \xrightarrow[\text{k واحد بالا}]{k} y = \sqrt{4-x} + k$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{k-2 \text{ واحد}} y = \sqrt{4-(x-(k-2))} + k = \sqrt{-x+k+2} + k$$

این تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. مختصات این نقطه $(1, 1)$ است که باید در ضابطه صدق کند.

$$y = \sqrt{-x+k+2} + k \xrightarrow{(1,1)} 1 = \sqrt{k+1} + k$$

$$\Rightarrow 1-k = \sqrt{k+1} \xrightarrow{\text{توان } 2} 1-2k+k^2 = k+1 \Rightarrow k^2-3k=0 \Rightarrow k(k-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \checkmark \\ k=3 \times \end{cases}$$

با جای‌گذاری $k=0$ ، ضابطه به صورت $y = \sqrt{-x+2}$ درمی‌آید.

$$y = \sqrt{-x+2} - 1$$

این ضابطه را ۱ واحد به پایین می‌آوریم:

منحنی به دست آمده را با محور x ها قطع می‌دهیم (y را صفر می‌دهیم).

$$y = \sqrt{-x+2} - 1 \Rightarrow 0 = \sqrt{-x+2} - 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{-x+2} \Rightarrow x = 1$$

۵۷۷. ۳ نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ را k واحد در راستای عمودی حرکت

می‌دهیم. ضابطه‌اش به صورت $y = \sqrt{x+3} + k$ درمی‌آید.

چون این تابع، صعودی اکید است، پس وارونش را حتماً روی نیمساز ناحیه اول

و سوم قطع می‌کند.

حالا x را تنها می‌کنیم. حواستان به دامنه هم باشد که در ضابطه به صورت $x \leq \frac{3}{2}$ داده شده است.

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{4} \Rightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} - y$$

$$\xrightarrow{\div 2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{y}{2} + \frac{29}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \left|x - \frac{3}{2}\right| = \sqrt{-\frac{y}{2} + \frac{29}{4}}$$

$$\xrightarrow{x \leq \frac{3}{2}} -x + \frac{3}{2} = \sqrt{-\frac{y}{2} + \frac{29}{4}} \Rightarrow x = -\sqrt{-\frac{y}{2} + \frac{29}{4}} + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = -\sqrt{-\frac{1}{2}x + \frac{29}{4}} + \frac{3}{2}$$

a b c

پس: $a + 2b + c = -\frac{1}{2} + 2\left(\frac{29}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$

۵۸۱. ۱) ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

۲) نمودار بالا را ۱ واحد به راست می‌بریم. باید جای x ها، $x-1$ قرار دهیم:

$$y = (x-1-1)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

دامنه تابع اولیه $x \geq 1$ بود. الان که ۱ واحد به راست بردیم، دامنه $x \geq 2$ می‌شود.

۳) باید نمودار مرحله قبل را نسبت

به خط $y = x$ قرینه کنیم تا به g برسیم. دقت کنید نیازی به پیدا کردن ضابطه نیست.

۴) حالا نمودار g و خط $y = -2x$ را در یک دستگاه می‌کشیم:

دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x = -1$ متقاطع‌اند.

۵۸۲. ۴) با تابع درجه دو طرفیم، پس باید آن را مربع کامل بنویسیم.

$$y = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 4$$

حالا x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y + 4 = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+4} = |x-1|$$

چون دامنه $x \geq 1$ است پس جای $|x-1|$ ، $x-1$ می‌گذاریم:

$$\sqrt{y+4} = x-1 \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1$$

$$y = \sqrt{x+4} + 1$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

حالا f^{-1} را با g برابر می‌گذاریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2}$$

وقتی گزینه‌ها را داریم، برای چی خودمان را درگیر حل معادله کنیم؟! بین ۱۲، ۱۵، ۱۸ و ۲۱، فقط به ازای $x = 12$ و $x = 21$ ، رادیکال عددی رُند بیرون می‌دهد، پس جواب یکی از این دوتاست. تساوی فقط به ازای $x = 21$ برقرار می‌شود.

۵۸۳. ۲) عددگذاری: در تابع فرض می‌کنیم $x = -\frac{1}{2}$:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{16} - 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{9}{16}$$

سؤال عرض نقطه تقاطع y و y^{-1} را ۱ داده، پس مختصات این نقطه به صورت $(1, 1)$ است.

تابع $y = \sqrt{\sqrt{x+3}} + k$ از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد:

$$1 = \sqrt{\sqrt{1+3}} + k \Rightarrow k = -1$$

تا این‌جا، ضابطه به شکل $y = \sqrt{\sqrt{x+3}} - 1$ شد.

کارهایی که سؤال گفته را روی آن انجام می‌دهیم:

$$y = \sqrt{\sqrt{x+3}} - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -\sqrt{\sqrt{x+3}} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y = -\sqrt{\sqrt{x+4}} + 3 + 1$$

از بین نقاط داده‌شده، نقطه $(0, -\sqrt{5} + 1)$ روی این منحنی قرار دارد.

۵۷۸. ۱) عددگذاری: f از $(2, 1)$ می‌گذرد پس باید $(1, 2)$ در وارونش هم

صدق کند که فقط به ۱ می‌خورد.

راه دوم: تابع را مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{\Delta=4+1} y = x^2 - 4x + 4 + 1$$

$$\Rightarrow y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y-1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x-2| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2 \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \sqrt{x-1} + 2$$

برای دامنه وارون، باید برد تابع اصلی را پیدا کنیم.

سهمی $y = (x-2)^2 + 1$ با دامنه $x \geq 2$ را

رسم می‌کنیم:

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty)$$

۵۷۹. ۱) باید تابع را مربع کامل بنویسیم:

$$y = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y = -(x^2 - 6x + 5)$$

داخل پرانتز، عدد ۹ اضافه و کم می‌کنیم:

$$y = -(x^2 - 6x + 9 - 9 + 5) = -(x^2 - 6x + 9) + 4$$

$$\Rightarrow y = -(x-3)^2 + 4$$

حالا x را برحسب y می‌نویسیم:

$$(x-3)^2 = 4-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-3| = \sqrt{4-y}$$

با دامنه $x \geq 3$ ، داخل قدرمطلق مثبت است، پس خودش بیرون می‌آید:

$$x-3 = \sqrt{4-y} \Rightarrow x = \sqrt{4-y} + 3$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

رسیدیم به جای مهم داستان، یعنی دامنه f^{-1} .

به جای $D_{f^{-1}}$ باید R_f را حساب کنیم. نمودار

$y = -(x-3)^2 + 4$ با دامنه $x \geq 3$ را می‌کشیم:

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$$

۵۸۰. ۴) در ضابطه از ۲- فاکتور می‌گیریم:

$$y = -2x^2 + 6x + 10 = -2(x^2 - 3x - 5)$$

برای مربع کامل نوشتن، مربع نصف ضریب x (یعنی $\frac{9}{4}$) را اضافه و کم می‌کنیم:

$$y = -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 5\right) = -2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}\right)$$

مربع کامل

$$\Rightarrow y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم $y = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{y}$ که فقط در ۲ صدق می‌کند.

راه دوم: در تابع $y = x^3 - 2x^2 + 1$ را برحسب y ، با توجه به $-1 < x < 0$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y} = |x^2 - 1| \\ \xrightarrow{-1 < x < 0} \sqrt{y} &= -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \sqrt{y} \\ \xrightarrow{\text{جذر}} |x| &= \sqrt{1 - \sqrt{y}} \xrightarrow{-1 < x < 0} -x = \sqrt{1 - \sqrt{y}} \\ \Rightarrow x &= -\sqrt{1 - \sqrt{y}} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}} \end{aligned}$$

پس تابع وارون $y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}}$ است.

۵۸۴. ۳ با اضافه و کم کردن یک، می‌توانیم f را به صورت مربع کامل بنویسیم:

حالا وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \\ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y + 1} &= |\sqrt{x} + 1| \\ \xrightarrow{\sqrt{x} + 1 > 0} \sqrt{y + 1} &= \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + 1} - 1 \\ \xrightarrow{\text{توان } 2} x &= (\sqrt{y + 1} - 1)^2 \\ \Rightarrow x &= y + 1 - 2\sqrt{y + 1} + 1 \Rightarrow x = y + 2 - 2\sqrt{y + 1} \\ \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y &= x + 2 - 2\sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

پس:

برای به دست آوردن دامنه f^{-1} ، باید برد f را پیدا کنیم. برای پیدا کردن محدوده (برد) f ، از $\sqrt{x} \geq 0$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \geq 0 &\xrightarrow{+1} \sqrt{x} + 1 \geq 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1 \\ \xrightarrow{-1} (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \geq 0 &\Rightarrow f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

پس برد f ، بازه $[0, +\infty)$ و در نتیجه:

$$D_{f^{-1}}: x \geq 0$$

بنابراین:

۵۸۵. ۳ عددگذاری: در خود تابع نقطه $(1, 9)$ را داریم پس در گزینه درست باید $(9, 1)$ بخورد.

راه دوم: x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم. اگر جای ۲، بنویسیم $1 + 1$ ، اتحاد مکعب درست می‌شود:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{\text{اتحاد مکعب}} + 1$$

$$\Rightarrow y = (x + 1)^3 + 1 \Rightarrow (x + 1)^3 = y - 1$$

$$\Rightarrow x + 1 = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$$

۵۸۶. ۱ f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2(x - 6) = x^3 - 6x^2 \quad g(x) = 4(3x - 2) = 12x - 8$$

$f + g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$$

وارون تابع به دست آمده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^3 \xrightarrow{\text{فرجه } 3} \sqrt[3]{y} = x - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} + 2 \\ \xrightarrow{\text{عوض کردن } y \text{ و } x} y &= \sqrt[3]{x} + 2 \end{aligned}$$

۵۸۷. ۲ وقتی در تابع f ، $\sqrt[3]{x}$ و در g ، x^3 داریم؛ یعنی قطعاً پای وارون شدن در میان است.

خب از $f(x) = x^3 - 1$ باید به $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ برسیم.

(۱) اول وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = y + 1 \xrightarrow{\text{فرجه } 3} x = \sqrt[3]{y + 1} \\ \xrightarrow{\text{عوض کردن } y \text{ و } x} y &= \sqrt[3]{x + 1} \end{aligned}$$

(۲) شانس‌مان گرفت! الان کافی است در ضابطه به دست آمده، جای x ها، $x - 2$ قرار دهیم (یعنی ۲ واحد به راست برویم):

$$y = \sqrt[3]{x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow x - 2} y = \sqrt[3]{(x - 2) + 1} = \sqrt[3]{x - 1}$$

پس مراحل این‌جوری شد:

$$y = x^3 - 1 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \sqrt[3]{x + 1} \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۲ واحد}} y = \sqrt[3]{x - 1}$$

۵۸۸. ۲ وقتی تابعی یک‌به‌یک باشد، انتقال‌هایش هم یک‌به‌یک است. تابع $y = \sqrt[3]{x}$ یک‌به‌یک است:

تابع ۲، چندتا ریشه دارد، پس یک‌به‌یک نیست:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x \xrightarrow{y=0} \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x = 0 \xrightarrow{\times 3} x(x^2 - 3x - 3) = 0$$

۳ تا ریشه $\Delta > 0$ جواب ۲ است ولی گزینه‌های دیگر را ببینید:

$$1 \quad y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \frac{1}{3}$$

$$3 \quad y = \frac{1}{3}x^3 + 1 \quad 4 \quad y = \frac{1}{3}x^3 - 1$$

هر سه گزینه باقی‌مانده به کمک انتقال، وارون کردن، انقباض و انقباض از تابع $y = \sqrt[3]{x}$ به دست می‌آیند، مثلاً ۱، این‌جوری می‌شود:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{وارون}} y = x^3 \xrightarrow{\text{واحد راست}} y = (x - 1)^3 \\ \xrightarrow{\text{واحد بالا}} y &= (x - 1)^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{(k=1)}]{\text{انقباض عمودی}} y = \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \frac{1}{3}$$

۵۸۹. ۱ ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$y = 2\sqrt{x}(4x - 6\sqrt{x} + 3) \Rightarrow y = 8x\sqrt{x} - 12x + 6\sqrt{x}$$

با اضافه و کم کردن ۱، به یک اتحاد مکعب می‌رسیم:

$$y = 8x\sqrt{x} - 12x + 6\sqrt{x} - 1 + 1 \Rightarrow y = (2\sqrt{x} - 1)^3 + 1$$

اتحاد مکعب

حالا وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y = (2\sqrt{x} - 1)^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = (2\sqrt{x} - 1)^3 \xrightarrow{\text{فرجه } 3} \sqrt[3]{y - 1} = 2\sqrt{x} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt[3]{y - 1} + 1 \xrightarrow{\div 2} \sqrt{x} = \frac{\sqrt[3]{y - 1} + 1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x = \left(\frac{\sqrt[3]{y - 1} + 1}{2}\right)^2$$



عددگذاری: در $f(x) = 5^{\log_x 5}$ به ازای $x = 25$ داریم $y = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ پس

در تابع وارون باید به ازای $x = \sqrt{5}$ داشته باشیم $y = 25$ که فقط در **۳** یعنی $y = 5^{\log_x 5}$ صدق می‌کند.

۵۹۴. ۳ وارون هر ضابطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

(۱) ضابطه بالایی: $y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \xrightarrow{\div 2} x = \frac{y-1}{2}$

$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2x - 1$

دامنه وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$x < 1 \xrightarrow{\times 2} 2x < 2 \xrightarrow{+1} 2x + 1 < 3 \Rightarrow y < 3$

پس وارون ضابطه دوم $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ و دامنه‌اش $x < 3$ است.

(۲) ضابطه پایینی: $y = 4x + 1 \Rightarrow 4x = y - 1$

$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4x - 1$

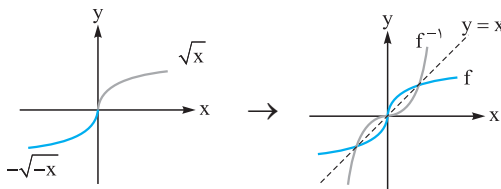
دامنه وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$x \geq 1 \xrightarrow{\times 4} 4x \geq 4 \xrightarrow{+1} 4x + 1 \geq 5 \Rightarrow y \geq 5$

پس وارون ضابطه دوم $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$ و دامنه‌اش $x \geq 5$ است.

در نتیجه: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & x < 3 \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{4} & x \geq 5 \end{cases}$

۵۹۵. ۳ راه اول: نمودار f را می‌کشیم، اگر آن را نسبت به $y = x$ قرینه کنیم، نمودار سمت راست به دست می‌آید:



نمودار شکل مربوط به تابع $y = x|x|$ است که چند باری هم در کنکور آمده است.

عددگذاری: نقطه $A(4, 2)$ روی f است، پس نقطه $A'(2, 4)$ باید روی f^{-1} باشد. گزینه‌های **۱** و **۴** تا این‌جا رد شدند.

نقطه بعدی روی f را $B(-4, -2)$ می‌گیریم. نقطه $B'(-2, -4)$ بین دو گزینه باقی‌مانده فقط روی **۳** می‌باشد، پس جواب است.

۵۹۶. ۲ وارون هر ضابطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

(۱) ضابطه بالایی:

$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = x - 1$

دامنه وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$x \geq 4 \xrightarrow{+1} x + 1 \geq 5 \Rightarrow y \geq 5$

پس وارون ضابطه اول $y = x - 1$ و دامنه‌اش $x \geq 5$ است.

(۲) ضابطه پایینی: $y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = y + 1 \xrightarrow{\times 2} x = 2y + 2$

$y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = y + 1 \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = 2x + 2$

دامنه وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$x < 4 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}x < 2 \xrightarrow{-1} \frac{1}{2}x - 1 < 1 \Rightarrow y < 1$

پس وارون ضابطه دوم $y = 2x + 2$ و دامنه‌اش $x < 1$ است.

$y = (\frac{\sqrt{x-1}+1}{2})^2 = \frac{(\sqrt{x-1}+1)^2}{4}$ عوض کردن x و y

$f^{-1}(x) = \frac{(\sqrt{x-1}+1)^2}{4}$

پس:

$\frac{ab+c}{n} = \frac{-1(1)+4}{3} = 1$

در نتیجه:

۵۹۰. ۱ عددگذاری: در $f(x) = 2^x - 1$ به ازای $x = 1$ داریم $y = 1$ و

نقطه $(1, 1)$ فقط در گزینه‌های **۱** و **۳** صدق می‌کند. به ازای $x = 3$ داریم $y = 7$ پس باید $(7, 3)$ در تابع معکوس صدق کند و **۱** صحیح است.

راه دوم: x را برحسب y پیدا می‌کنیم: $y = 2^x - 1 \Rightarrow 2^x = y + 1$

می‌دانیم اگر $A^B = C$ ، آن‌گاه $\log_A C = B$ پس:

$2^x = y + 1 \Rightarrow \log_2(y + 1) = x$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

۵۹۱. ۲ راه اول: داریم: $f(x) = \log_3(x-1) - 3$ ، برای پیدا کردن

ضابطه تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$y = \log_3(x-1) - 3 \Rightarrow y + 3 = \log_3(x-1)$

$\Rightarrow x - 1 = 10^{y+3} \Rightarrow x = 10^{y+3} + 1$

$y = 10^{x+3} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$ عوض کردن x و y

عددگذاری: روی نمودار $f(x) = \log_3(x-1) - 3$ اگر $x = 2$ باشد:

$y = (\log_3 1) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow (2, -3) \in f$

پس نقطه $(-3, 2)$ باید روی نمودار f^{-1} قرار داشته باشد که فقط در **۲**

یعنی $f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$ صدق می‌کند.

۵۹۲. ۱ راه اول: در رابطه $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ با طرفین وسطین، 2^x را تنها می‌کنیم:

$y2^x + y = 2^x - 1 \Rightarrow y2^x - 2^x = -y - 1$

$\Rightarrow 2^x(y-1) = -y-1 \Rightarrow 2^x = \frac{-y-1}{y-1} = \frac{y+1}{1-y}$

حالا از تبدیل نمایی به لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

$2^x = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow \log_2 \frac{y+1}{1-y} = x$

در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم:

عددگذاری: در تابع $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ داریم $f(1) = \frac{1}{3}$ پس در تابع وارون

باید $f(\frac{1}{3}) = 1$ باشد که فقط در **۱** یعنی $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ صدق می‌کند.

۵۹۳. ۳ راه اول: رابطه $A^B = C$ را می‌توانیم به شکل $\log_A C = B$

بنویسیم:

$A \leftarrow 5^{\log_x 5} = y \Rightarrow \log_5 y = \log_x 5$

حالا برعکس کار قبل را می‌کنیم. از $\log_A C = B$ به $A^B = C$ می‌رسیم:

$\log_x 5 = \log_5 y \Rightarrow x^{(\log_5 y)} = 5$

$\log_5 y$ و $\log_y 5$ معکوس یکدیگرند. دو طرف را به توان می‌رسانیم

که توان x ، ۱ شود: $(x^{(\log_5 y)})^{\log_y 5} = 5^{\log_y 5} \Rightarrow x^1 = 5^{\log_y 5}$

$y = 5^{\log_x 5}$ عوض کردن x و y

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 5 \rightarrow c \\ 2x+2 & x < 1 \rightarrow d \end{cases}$$

پس: $a = -1$ ، $b = 2$ ، $c = 5$ و $d = 1$.

با توجه به دامنه f^{-1} که $x \geq 5$ یا $x < 1$ است، $f^{-1}(k)$ به شرطی تعریف می‌شود که k در محدوده $x \geq 5$ یا $x < 1$ باشد.

۱ $f^{-1}(c+d) = f^{-1}(6)$ ✓ ۲ $f^{-1}(a+b) = f^{-1}(1)$ ✗
(در f^{-1} نیست)

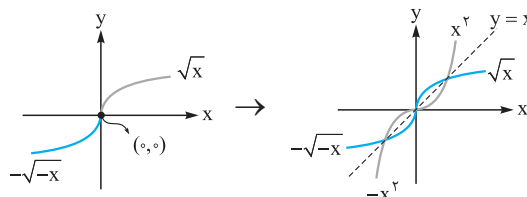
۳ $f^{-1}(a+d) = f^{-1}(6)$ ✓ ۴ $f^{-1}(b+c) = f^{-1}(7)$ ✓

۵۹۷. ۴ عددگذاری: تابع از نقاط $(0,0)$ و $(4,2)$ عبور می‌کند پس $(0,0)$ و $(2,4)$ باید در وارونش صدق کنند که فقط به ۴ می‌خورد.

راه دوم: تابع f را سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{x} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x}{x} \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

نمودار f را می‌کشیم و قرینه هر ضابطه را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم:



نمودار به دست آمده، همان $y = x|x|$ با دامنه $\mathbb{R}$ است.

۵۹۸. ۴ ریشه داخل قدرمطلق $x = 2$ است. تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x - (-4 + 2x) & x > 2 \\ 2x - (4 - 2x) & x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$$

در محدوده $x > 2$ ، f یک تابع ثابت و در نتیجه غیر یک‌به‌یک است.

پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که f در آن یک‌به‌یک است، $x \leq 2$ می‌باشد و ضابطه تابع در آن به صورت $y = 4x - 4$ است.

$$y = 4x - 4 \Rightarrow 4x = y + 4 \xrightarrow{+4} x = \frac{1}{4}y + 1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{1}{4}x + 1$$

دامنه f^{-1} ، همان برد f است. با توجه به دامنه f در این محدوده، بردش را پیدا می‌کنیم: $x \leq 2 \xrightarrow{\times 4} 4x \leq 8 \xrightarrow{-4} 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4 \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$

۵۹۹. ۴ ریشه‌های داخل قدرمطلق، $x = 3$ و $x = -4$ هستند.

تابع $f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$ را سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

○ صعودی) $x \geq 3: (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10$

○ نزولی) $-4 < x < 3: (-2x + 6) - (x + 4) + x = -2x + 2$

○ ثابت) $x \leq -4: (-2x + 6) - (-x - 4) + x = 10$

پس باید معکوس تابع $y = -2x + 2$ با دامنه $-4 < x < 3$ را پیدا کنیم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow 2x = -y + 2 \Rightarrow x = \frac{-y}{2} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{-x}{2} + 1$$

حالا با توجه به دامنه f در این محدوده، برد f (که همان $D_{f^{-1}}$ است) را حساب می‌کنیم:

$$-4 < x < 3 \xrightarrow{\times (-2)} -6 < -2x < 8$$

$$\xrightarrow{+2} -4 < -2x + 2 < 10 \Rightarrow -4 < y < 10$$

پس دامنه f^{-1} در این محدوده، $-4 < x < 10$ می‌باشد.

۶۰۰. ۲ ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6| \Rightarrow f(x) = |x+1| - |3x-6|$$

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق، ضابطه f را در سه بازه $x \leq -1$ ، $-1 < x \leq 2$ و $x > 2$ بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$x \leq -1: y = -x - 1 - (-3x + 6) \Rightarrow y = 2x - 7 \text{ (صعودی)}$$

$$-1 < x \leq 2: y = x + 1 - (-3x + 6) \Rightarrow y = 4x - 5 \text{ (صعودی)}$$

$$x > 2: y = x + 1 - (3x - 6) \Rightarrow y = -2x + 7 \text{ (نزولی)}$$

فقط شیب ضابطه سوم عددی منفی شد، پس فقط این ضابطه، نزولی است. ضابطه و دامنه وارون تابع $y = -2x + 7$ با دامنه $x \geq 2$ را حساب می‌کنیم.

(۱) ضابطه وارون:

$$y = -2x + 7 \xrightarrow{\text{تنها کردن } x} 2x = -y + 7 \Rightarrow x = \frac{-y}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y \text{ و } x} y = \frac{-x}{2} + \frac{7}{2}$$

(۲) دامنه وارون:

$$x \geq 2 \xrightarrow{\times (-2)} -2x \leq -4$$

$$\xrightarrow{+7} -2x + 7 \leq 3 \Rightarrow y \leq 3$$

برد تابع اصلی با دامنه وارون برابر است، پس ضابطه وارون $\frac{-x}{2} + \frac{7}{2}$ و دامنه‌اش $x \leq 3$ است.

۶۰۱. ۱ رادیکال‌ها را به قدرمطلق تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(\Delta x - 2)^2} = |2x+5| - |\Delta x - 2|$$

با استفاده از بازه‌بندی، قدرمطلق‌ها را از بین می‌بریم تا به تابعی چندضابطه‌ای برسیم: (ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها $x = -\frac{5}{2}$ و $x = \frac{2}{\Delta}$ هستند، پس بازه‌های ما $x \geq \frac{2}{\Delta}$ ، $-\frac{5}{2} \leq x < \frac{2}{\Delta}$ و $x < -\frac{5}{2}$ می‌شوند).

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 - (\Delta x - 2) = -3x + 7 & x \geq \frac{2}{\Delta} \\ 2x + 5 + (\Delta x - 2) = \Delta x + 3 & -\frac{5}{2} \leq x < \frac{2}{\Delta} \\ -2x - 5 + (\Delta x - 2) = 3x - 7 & x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

با توجه به ضابطه f واضح است که f در بازه $x \geq \frac{2}{\Delta}$ نزولی می‌شود (چون شیبش منفی است). ضابطه f در این بازه $y = -3x + 7$ است، حالا ضابطه وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y = -3x + 7 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ رو عوض کن}} x = -3y + 7$$

$$\Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

با توجه به گزینه‌ها، ضابطه f^{-1} در ۱ و ۲ درست است، حالا باید دامنه f^{-1} را محاسبه کنیم:

خواستون باشه!!! نکته یهو الان بگین که فوب دامنه f ، $x \geq \frac{2}{\Delta}$ بود، پس دامنه f^{-1} هم

همینه و ۲ رو برنید! کاملاً غلطه! چون دامنه f^{-1} برابر دامنه f نمی‌شه، بلکه برابر با برد f می‌شه، پس باید برد f رو پیدا کنید!

در این بازه، $(-2, 0)$ است که همان دامنه f^{-1} می‌شود:

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-2, 0)$$

ضابطه وارون را هم حساب می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 4} 4y = -x - 3 \Rightarrow x = -4y - 3$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y \text{ و } x} y = -2x - 3$$

$$f^{-1} = -2x - 3, -2 < x < 0$$

پس:

۶۰۵. **۲ عددگذاری:** در خود تابع نقطه $(-1, -4)$ را داریم، پس در

وارونش باید $(-4, -1)$ را داشته باشیم که فقط در **۲** صدق می‌کند.

راه دوم: اول ضابطه تابع را به ازای x های مثبت و منفی به دست می‌آوریم:

$$y = 2x - |x|$$

$$x \geq 0 \Rightarrow y = 2x - x \Rightarrow y = x \Rightarrow x = \frac{y}{1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{1}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = 2x + x \Rightarrow y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{3}$$

پس تابع وارون برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1} & x \geq 0 \\ \frac{x}{3} & x < 0 \end{cases}$$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ ساده کنیم، **۲** برابر f^{-1} است:

$$y = \frac{2x + |x|}{1} = \begin{cases} \frac{2x + x}{1} = \frac{3x}{1} & x \geq 0 \\ \frac{2x - x}{1} = \frac{x}{1} & x < 0 \end{cases}$$

۶۰۶. **۱ راه اول:** نقطه $(0, 0)$ روی تابع اصلی است. با جابه‌جایی x و y این

نقطه باز هم به همان نقطه $(0, 0)$ می‌رسیم.

این نقطه باید روی وارون تابع هم باشد. در بین گزینه‌ها، این نقطه فقط در **۱**

صدق می‌کند. (دقت کنید $x = 0$ در دامنه **۳** نیست.)

راه دوم: با توجه به ریشه داخل قدرمطلق (یعنی $x = 0$) تابع را دوضابطه‌ای

$$y = \frac{x}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & x < 0 \end{cases}$$

می‌نویسیم:

ضابطه وارون هر ضابطه را می‌توانیم به کمک رابطه‌ای که برای وارون تابع هموگرافیک

گفتیم، پیدا کنیم. دامنه وارون هر ضابطه، برد تابع اصلی در آن محدوده است.

$$(1) \text{ ضابطه اول: } y = \frac{1x+0}{1x+1} \xrightarrow{\text{جای } a \text{ و } d \text{ را عوض و قرینه می‌کنیم}} y^{-1} = \frac{-1x+0}{1x-1} = \frac{-x}{x-1}$$

$$= \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{-x+1}$$

محاسبه برد ضابطه اول:

$$y = \frac{x}{-x+1} \Rightarrow yx + y = x \Rightarrow yx - x = -y$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} \frac{y}{1-y} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq y < 1$$

(۲) ضابطه دوم:

$$y = \frac{1x+0}{-1x+1} \xrightarrow{\text{جای } a \text{ و } d \text{ را عوض و قرینه می‌کنیم}} y^{-1} = \frac{-1x+0}{-1x-1} = \frac{-x}{-x-1} = \frac{x}{x+1}$$

محاسبه برد ضابطه دوم:

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow -yx + y = x \Rightarrow yx + x = y \Rightarrow x(y+1) = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{y+1} \xrightarrow{x < 0} \frac{y}{y+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < y < 0$$

دامنه f^{-1} برابر برد f است، پس باید برد $f(x) = -3x + 7$ در بازه $x \geq \frac{7}{5}$ را پیدا کنیم که کار ساده‌ای است:

$$x \geq \frac{7}{5} \xrightarrow{\times (-3)} -3x \leq -\frac{21}{5} \xrightarrow{+7} -3x + 7 \leq \frac{29}{5}$$

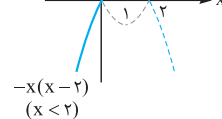
$$\Rightarrow R_f = (-\infty, \frac{29}{5}]$$

بنابراین دامنه f^{-1} هم $(-\infty, \frac{29}{5}]$ می‌شود و جواب **۱** است.

۶۰۲. **۳** اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ x(-x+2) & x < 2 \end{cases}$$

نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازه $(1, 2)$ نزولی اکید

است. ضابطه آن در این بازه به صورت

$$y = -x(x-2)$$

برای به دست آوردن وارون، باید آن را مربع کامل بنویسیم:

$$y = -(x^2 - 2x) = -\underbrace{(x^2 - 2x + 1 - 1)}_{(x-1)^2} = -(x-1)^2 + 1$$

x را برحسب y می‌نویسیم: $y = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| = \sqrt{1-y}$$

به ازای $1 < x < 2$ ، داخل قدرمطلق مثبت می‌شود:

$$x-1 = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = \sqrt{1-y} + 1$$

$$y = \sqrt{1-x} + 1$$

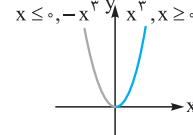
جای x و y را عوض می‌کنیم:

برد تابع f به ازای $1 < x < 2$ بازه $(0, 1)$ است، پس $D_{f^{-1}}$ همان $(0, 1)$ است.

۶۰۳. **۴** ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار f را می‌کشیم:



با توجه به نمودار f ، تابع در $x \leq 0$ نزولی

است. ضابطه وارون آن در این محدوده را به

دست می‌آوریم:

$$x \leq 0, y = -x^3 \xrightarrow{\text{تغییر کردن } x} x^3 = -y \Rightarrow x = -\sqrt[3]{y}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y \text{ و } x} y = -\sqrt[3]{x}$$

دامنه f^{-1} ، همان برد f است. برد این ضابطه، $y \geq 0$ بود، پس:

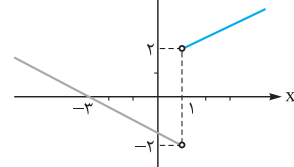
$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

در نتیجه ضابطه و دامنه f^{-1} به ترتیب $-\sqrt[3]{x}$ و $x \geq 0$ هستند.

۶۰۴. **۱** ضابطه f را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{2|x-1|} = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x > 1 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & x < 1 \end{cases}$$

نمودار f را رسم می‌کنیم:



تابع f در محدوده $-3 < x < 1$ ، زیر

محور x است و در این بازه، از ضابطه

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

پیروی می‌کند. برد آن

$$y^{-1} = \begin{cases} \frac{x}{-x+1} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

جای x مخرج اولی و جای $-x$ مخرج دومی می‌توانیم $|x|$ قرار دهیم:

$$y^{-1} = \frac{x}{-|x|+1}, -1 < x < 1$$

دامنه هم از اجتماع دامنه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۶۰۷. ۴ برای تنها کردن x در رابطه $y = \frac{1}{x}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ ، اول دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2y = x + \sqrt{x^2 + 4}$$

بعد رادیکال را تنها می‌کنیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2y - x = \sqrt{x^2 + 4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4y^2 - 4xy + x^2 = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 4 = 4xy \xrightarrow{\div 4} y^2 - 1 = xy \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$$

پس

جای x ها، $\frac{1}{x}$ می‌گذاریم:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x$$

در نتیجه:

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} - x\right) = 0$$

۶۰۸. ۲ ضابطه تابع به صورت $y = x + \frac{1}{x}$ است. برای آن که x را تنها کنیم، باید یک معادله درجه دو حل کنیم:

$$y = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\times x} yx = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

دلتا برابر است با:

$$\Delta = (-y)^2 - 4(1)(1) = y^2 - 4$$

x برابر است با:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

برای تشخیص درست علامت $+$ یا $-$ در تساوی بالا، یک نقطه روی تابع اولیه انتخاب می‌کنیم:

$$y = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{0 < x < 1} A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

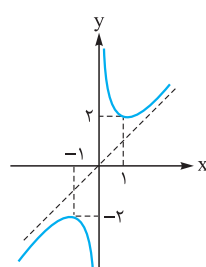
در تساوی $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ ، اگر $y_A = \frac{5}{2}$ را قرار دهیم، به ازای علامت $-$ ،

$$x_A = \frac{1}{2} \text{ می‌رسیم، پس رابطه باید به شکل } x = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ باشد.}$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$$

در مورد برد تابع $y = x + \frac{1}{x}$ ، خوب است که به نمودارش نگاهی بیندازید:



به ازای $0 < x < 1$ ، مقادیر تابع به صورت $y > 2$ درمی‌آیند. پس $D_{f^{-1}}$ در این حالت به صورت $x > 2$ می‌باشد و در نتیجه: $b = 2$ ؛

$$a + b = -\frac{1}{2} + 2 = 1/2 \text{ پس:}$$

۶۰۹. ۴ با توجه به وجود $\sqrt{-x}$ ، باید $x \leq 0$ باشد؛ پس: $|x| = -x$.

پس ضابطه f به صورت $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x+1}}$ درمی‌آید.

صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{-x})^2 - 1}{\sqrt{-x+1}} = \frac{(\sqrt{-x}-1)(\sqrt{-x}+1)}{\sqrt{-x+1}} = \sqrt{-x}-1$$

حالا ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{-x}-1 \Rightarrow \sqrt{-x} = y+1 \Rightarrow -x = (y+1)^2$$

$$\Rightarrow x = -(y+1)^2 \xrightarrow{\text{عوض کردن جای } y \text{ و } x} y = -(x+1)^2$$

برد تابع $f(x) = \sqrt{-x}-1$ همان $D_{f^{-1}}$ می‌شود:

$$R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

پس: $f^{-1}(x) = -(x+1)^2, x \geq -1$

۶۱۰. ۱ نمودار تابع f و تابع وارونش یعنی f^{-1} در نقطه $(1, 2)$ متقاطع‌اند، پس $(1, 2)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1} . در نتیجه نقطه $(2, 1)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1} ، بنابراین:

$$f(x) = \sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases} (1, 2) \Rightarrow 2 = \sqrt{a+b} \Rightarrow a+b=4 \\ (2, 1) \Rightarrow 1 = \sqrt{2a+b} \Rightarrow 2a+b=1 \end{cases}$$

از حل دو معادله به دست آمده، داریم:

$$b = 7, a = -3$$

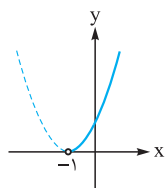
$$a - b = -3 - 7 = -10$$

پس:

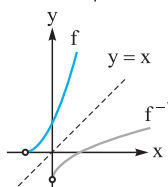
۶۱۱. ۴ راه اول: ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

سهمی $y = (x+1)^2$ با دامنه $x > -1$ را می‌کنیم:



قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم تا f^{-1} به دست آید:



واضح است که f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

۶۱۲. راه دوم: سهمی $f(x) = (x+1)^2$ در دامنه $x > -1$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

پس برای به دست آوردن نقاط تقاطع f و f^{-1} ، کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$(x+1)^2 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب ندارد.}$$

۶۱۳. ۳ نمودار تابع $y = -(x+1)^2 + 1$ و

نمودار تابع معکوسش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۶۱۳. ۲ راه اول: تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ صعودی اکید است، پس تابع وارونش را باید روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع کند؛ یعنی در نقطه (a, a) ،

پس می‌توانیم گزینه‌ها را امتحان کنیم (هر عددی به x بدهیم y هم باید همان شود).

$$1 \quad x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{-1+2} = 1 \quad \times$$

$$2 \quad x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2+2} = 2 \quad \checkmark \text{ پس جواب ۲ است.}$$

$x = -2$ در معادله گنگ اولیه صدق نمی‌کند.

مختصات نقطه‌ای به طول ۱ روی نیمساز ناحیه اول و سوم به صورت $M(1, 1)$ است.

$$OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{فاصله } M \text{ تا مبدأ برابر است با:}$$

۶۱۷. ۴ توابع $y = \frac{x-3}{2}$ و $y = 2\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس مجموعه‌شان هم اکیداً صعودی است:

$$f(x) = \underbrace{\frac{x-3}{2}}_{\text{اکیداً صعودی}} + \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

در نتیجه به جای حل $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2} + 2\sqrt{x} = x \xrightarrow{\times 2} x-3+4\sqrt{x} = 2x$$

$$\Rightarrow x-4\sqrt{x}+3 = \text{جمله مشترک}$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$$

چون این نقاط روی خط $y = x$ هستند، مختصاتشان $A(1, 1)$ و $B(9, 9)$ است.

$$AB = \sqrt{(9-1)^2 + (9-1)^2} = 8\sqrt{2} \quad \text{طول پاره خط } AB \text{ برابر است با:}$$

۶۱۸. ۳ توابع $y = 3x - 12$ و $y = x^3$ هر دو صعودی‌اند هستند، پس

$$f(x) = \underbrace{x^3}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{3x-12}_{\text{صعودی اکید}} \quad \text{مجموعه‌شان صعودی‌اند است:}$$

اگر تابعی صعودی‌اند باشد، برای به دست آوردن نقاط تقاطع آن تابع با وارونش، به جای معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$f(x) = x \xrightarrow{f \text{ صعودی}} \text{نقطه تقاطع } f \text{ و } f^{-1}$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x = 12 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 2$$

با جای‌گذاری $x = 2$ در f یا در معادله نیمساز ناحیه اول و سوم، به نقطه $A(2, 2)$ می‌رسیم.

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{فاصله } A(2, 2) \text{ از مبدأ برابر است با:}$$

۶۱۹. ۳

نکته: اگر f و g در نقطه (α, β) متقاطع باشند، توابع f^{-1} و g^{-1} در نقطه (β, α) متقاطع‌اند.

در این جا وقتی f^{-1} و f خط d در (α, β) متقاطع‌اند، پس f و وارون خط d در (β, α) متقاطع‌اند.

وارون خط d به معادله $y = x - 2$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = x + 2$$

پس کافی است f را با خط بالا قطع دهیم:

$$x^3 + x + 1 = x + 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

با جای‌گذاری $x = 1$ در f ، داریم:

$$f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 3$$

پس نقطه تقاطع کمکی ما $(1, 3)$ و نقطه تقاطع f^{-1} با خط d ، نقطه $(3, 1)$ است.

$$\alpha + \beta = 3 + 1 = 4$$

۶۲۰. ۱ گفتیم دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ دامنه تابع داخلی یعنی f^{-1} است:

$$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = \{2, 3\}$$

از طرفی $f \circ f^{-1}$ همانی است، پس با اعداد دامنه‌اش، زوج مرتبه‌هایی می‌نویسیم

$$f \circ f^{-1} = \{(2, 2), (3, 3)\} \quad \text{که مؤلفه اول و دومشان یکسان است:}$$

راه دوم: چون سؤال گفته نقطه تلاقی تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ با نمودار معکوس

آن و f اکیداً صعودی است، پس کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\sqrt{x+2} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \times \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

$x = -1$ در معادله گنگ اولیه صدق نمی‌کند.

۶۱۴. ۳ می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجه زوج (با دامنه $\mathbb{R}$) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند.

بنابراین برای این که تابع $f(x) = (a+1)x^4 + (a+2)x^3 + (a+4)x^2 + 3x$ وارون‌پذیر باشد، باید جمله x^4 حذف شود یعنی $a = -1$.

با جای‌گذاری $a = -1$ ، ضابطه f به شکل $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ درمی‌آید.

تابع f را می‌توانیم به شکل $f(x) = (x+1)^3 - 1$ بنویسیم که تابعی اکیداً صعودی است، پس برای پیدا کردن نقاط تقاطع f^{-1} و نیمساز ربع اول و سوم، می‌توانیم f را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهیم:

$$f^{-1}(x) = x \xrightarrow{\text{معادله جایگزین (f صعودی اکید)}} f(x) = x$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x = x \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس f^{-1} در ۳ نقطه خط $y = x$ را قطع می‌کند.

۶۱۵. ۲

نکته: اگر f یک تابع اکیداً صعودی باشد، جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$

و $f(x) = x$ ، یکسان است.

تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = 3x + |x| + 1 = \begin{cases} 4x + 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار f ، نتیجه می‌گیریم f یک تابع اکیداً صعودی است:

پس برای به دست آوردن تقاطع f و f^{-1} ، می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$f(x) = x \Rightarrow 3x + |x| + 1 = x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0: 4x + 1 = x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \times \\ x < 0: 2x + 1 = x \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(-1, -1) \end{cases}$$

فاصله نقطه $(-1, -1)$ را از خط $y + x = 0$ حساب می‌کنیم:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۶۱۶. ۲ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ به

شکل روبه‌رو است: پس تابع اصلی، تابعی صعودی اکید است.

برای پیدا کردن نقاط تقاطع f و f^{-1} ، می‌توانیم

معادله تابع اصلی را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{معادله جایگزین (f صعودی اکید)}} \sqrt{x+3} - 1 = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = x + 1 \xrightarrow{\text{توان } 2}$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = -2 \times \end{cases}$$

۶۲۱. ۲ چون $(fog)(x) = x$ شده، پس f و g وارون هم هستند.

با توجه به $g, f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ یعنی f^{-1} به صورت روبه‌رو است:

$$g = f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

۶۲۲. ۳ ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ یعنی $(gof)(x) = x$

پس g همان f^{-1} است. در نتیجه $g(5)$ همان $f^{-1}(5)$ است.

برای محاسبه $f^{-1}(5)$ ، ضابطه f را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 2x - 1 \xrightarrow{\text{محاسبه } f^{-1}(5)} 5 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس: $f^{-1}(5) = \frac{1}{2}$

۶۲۳. ۱ نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ به

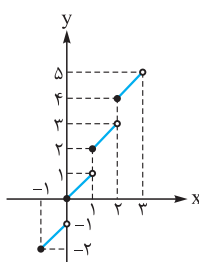
صورت روبه‌رو است:

چون $4/5$ در برد f قرار دارد، پس در $D_{f^{-1}}$

هم موجود است و f رد می‌شود.

حالا با توجه به رابطه $f(f^{-1}(a)) = a$ داریم:

$$f(f^{-1}(4/5)) = 4/5$$



اشاره: در همین سؤال اگر از ما $(f^{-1})(3/5)$ را می‌خواستند، جواب

۴ می‌شد. چون $3/5 \notin R_f$ نیست.

۶۲۴. ۲ می‌دانیم $f(f^{-1}(x)) = x$ پس: $f(f^{-1}(-5)) = -5$

با جای‌گذاری تساوی بالا در معادله داده‌شده، داریم:

$$3g(f(a)) + f(f^{-1}(-5)) = 1 \Rightarrow 3g(f(a)) = 6$$

$$\Rightarrow g(f(a)) = 2 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{1-x}} \Rightarrow \sqrt{1-f(a)} = 2$$

$$\sqrt{1-f(a)} = 2 \Rightarrow 1-f(a) = 4$$

$$\Rightarrow f(a) = -3 \xrightarrow{(2,6) \in f} a = 2$$

۶۲۵. ۱ راه‌اول: جای $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ می‌نویسیم

محاسبه‌اش ۳ مرحله دارد:

$$f(f(f(\sqrt{2})))$$

مرحله ۱
مرحله ۲
مرحله ۳

$$\text{مرحله اول: } f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{2}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{مرحله دوم: } f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = \sqrt{2}$$

$$\text{مرحله سوم: } f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}} \xrightarrow{\text{همان مرحله ۱}} f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

همان $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

راه دوم: در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر a و d قرینه باشند، f^{-1} همان f می‌شود.

در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2}x + 0}{3x - \sqrt{2}}$ ، a و d قرینه‌اند، پس f^{-1} همان f است، یعنی جای

$f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ می‌توانیم $f \circ f^{-1}(\sqrt{2})$ بنویسیم.

$$f(f^{-1}(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

توابعی همانی بودند، پس:

۶۲۶. ۱ مناسبه کردن به روش عادی به عهده خودتون!

مثل روش دوم سؤال قبل عمل می‌کنیم. در تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ ، a و d

قرینه‌اند، پس f^{-1} همان f است؛ یعنی به جای $f^{-1} \circ f^{-1}(4)$ می‌توانیم

بنویسیم $f \circ f(4)$. از طرفی $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ توابع همانی بودند، پس:

$$f(f^{-1}(f(4))) = f(4) = \frac{4+2}{2 \times 4 - 1} = \frac{6}{7}$$

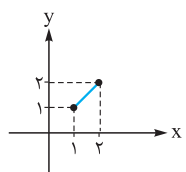
۶۲۷. ۴ دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ ، دامنه تابع داخلی یعنی f^{-1} است. از طرفی

$D_{f \circ f^{-1}} = R_f = [1, 2]$ همان $D_{f^{-1}}$ است.

ضابطه تابع $f \circ f^{-1}$ هم به صورت $y = x$ است.

پس باید نیمساز ناحیه اول و سوم را در دامنه $[1, 2]$

رسم کنیم:



۶۲۸. ۳ تابع $f \circ f^{-1}$ تابع همانی بود، یعنی ضابطه‌اش $y = x$ می‌شد.

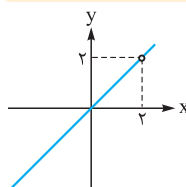
فقط دامنه‌اش را باید حواسمان باشد. دامنه $f \circ f^{-1}$ می‌شد همان $D_{f^{-1}}$ که آن

هم R_f است.

نکته: برد تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، به صورت $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

با توجه به نکته بالا، برد تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس دامنه f^{-1} هم $\mathbb{R} - \{2\}$ است.

در نتیجه ما باید $y = x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ را رسم کنیم:



۶۲۹. ۱ ضابطه $f \circ f^{-1}$ به صورت $y = x$ است.

دامنه‌اش هم دامنه تابع داخلی است: $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

از طرفی تابع اکیداً صعودی و پیوسته است:

$$x^3 + \sqrt{x} + 6$$

اکیداً صعودی
اکیداً صعودی

پس بردش با دادن نقطه ابتدا و انتهای دامنه به دست می‌آید:

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} + 6 \xrightarrow{\text{ابتدای برد } x=-1} f(-1) = -1 - 1 + 6 = 4$$

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} + 6 \xrightarrow{\text{انتهای برد } x=1} f(1) = 1 + 1 + 6 = 8$$

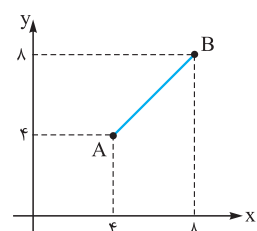
پس برد به صورت $R_f = [4, 8]$ است.

در نتیجه: $D_{f \circ f^{-1}} = R_f = [4, 8]$

پس نمودارمان نیمساز ناحیه اول و سوم در

محدوده ۴ تا ۸ است:

طول پاره خط AB برابر است با:



$$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$



ضابطه g را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = f^{-1}(x) - f^{-1}(-x) = (x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) = -4x$$

برد g را حساب می‌کنیم:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq -4x \leq 4 \Rightarrow R_g = [-4, 4]$$

این بازه، شامل ۹ عدد صحیح است.

۶۳۳. ۲ ابتدا g^{-1} را می‌نویسیم: $g^{-1} = \{(1, -2), (3, 4), (-2, 2)\}$

حالا $g^{-1} \circ f$ را تشکیل می‌دهیم. x ها را از D_f می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} x \\ 3 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g^{-1}} 2 \\ -2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} x \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(3, 2)\}$$

برای نوشتن تابع $(g^{-1} \circ f) + 2f$ ابتدا باید دامنه را پیدا کنیم. دامنه از اشتراک دامنه $g^{-1} \circ f$ و f به دست می‌آید:

$$D_{g^{-1} \circ f} \cap D_f = \{3\} \cap \{1, 3, -2\} = \{3\}$$

مقدار $g^{-1} \circ f + 2f$ در $x = 3$ ، بردش می‌شود:

$$(g^{-1} \circ f)(3) + 2f(3) = 2 + 2(-2) = -2$$

۶۳۴. ۴ راه اول: جای $g^{-1} \circ f$ می‌نویسیم $(f \circ g)^{-1}$.

پس اول $f \circ g$ را پیدا می‌کنیم، بعد وارونش می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} -1 \xrightarrow{g} -3 \xrightarrow{f} \sqrt{2} \\ 5 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} -1 \\ 4 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} x \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(-1, \sqrt{2}), (5, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -1)\}$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$(f \circ g)^{-1} = \{(\sqrt{2}, -1), (\frac{1}{2}, 5), (-1, \frac{1}{2})\}$$

راه دوم: f^{-1} و g^{-1} را می‌نوشتیم.

۶۳۵. ۲ $(f \circ g \circ f^{-1})(4)$ یعنی $f(g(f^{-1}(4)))$

سه مرحله دارد:

$$\underbrace{f(g(f^{-1}(4)))}_{(1)}$$

$$\underbrace{\quad}_{(2)}$$

$$\underbrace{\quad}_{(3)}$$

(۱) برای محاسبه $f^{-1}(4)$ ، باید در f دنبال زوج مرتبی باشیم که y اش ۴ باشد:

$$(3, 4) \in f \Rightarrow (4, 3) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(4) = 3$$

(۲) حالا شد $f(g(3))$.

الان نوبت $g(3)$ است:

$$(3, -3) \in g \Rightarrow g(3) = -3$$

(۳) حالا شد $f(-3)$:

$$(-3, 2) \in f \Rightarrow f(-3) = 2$$

۶۳۶. ۲ برای محاسبه $f(g^{-1}(3))$ دو مرحله داریم:

(۱) محاسبه $g^{-1}(3)$ که باید معادله $g(x) = 3$ را حل کنیم:

$$\frac{2x+5}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x-3 = 2x+5 \Rightarrow x = 8$$

(۲) حالا $f(8)$:

$$f(x) = x + \sqrt{x+1} \Rightarrow f(8) = 8 + 3 = 11$$

۶۳۷. ۴ جای $(f^{-1} \circ g)(a)$ می‌نویسیم $f^{-1}(g(a))$.

پس:

$$f^{-1}(g(a)) = 6$$

در تابع وارون گفتیم از $f^{-1}(\bigcirc) = \square$ نتیجه می‌گیریم $f(\square) = \bigcirc$ پس

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(a)$$

در این جا داریم:



۶۳۰. ۳ نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{x+1} + 3$

به صورت روبه‌رو است:

دامنه و برد f را می‌نویسیم:

$$R_f = (-\infty, 3], \quad D_f = [-1, +\infty)$$

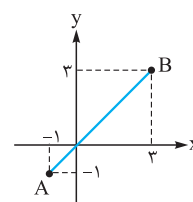
نمودار توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را رسم می‌کنیم:

$$1) (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 3]$$

$$2) (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [-1, +\infty)$$



قسمت مشترک دو تابع به صورت روبه‌رو است:

طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

۶۳۱. ۳ برای آن که دو تابع با هم برابر باشند، باید اولاً دامنه و ثانیاً ضابطه‌هایشان یکسان باشد.

ضابطه هر دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابر با ضابطه تابع همانی است:

$$\begin{cases} (f \circ f^{-1})(x) = x \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{cases}$$

دامنه توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ به ترتیب D_f و $D_{f^{-1}}$ است. از طرفی $D_{f^{-1}}$ همان R_f است، پس برای آن که توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابر باشند، کافی است $D_f = R_f$.

برد تابع $f(x) = x^2 - 8x + k$ با دامنه $[4, +\infty)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 8x + 16 - 16 + k = (x-4)^2 + k - 16$$

$$x \geq 4 \Rightarrow x-4 \geq 0 \Rightarrow (x-4)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + k - 16 \geq k - 16 \Rightarrow f(x) \geq k - 16$$

$$R_f = [k-16, +\infty)$$

پس:

$$k-16 = 4 \Rightarrow k = 20$$

در نتیجه باید:

۶۳۲. ۱ برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{x-2} \leq 0 \xrightarrow{+1} 1 - \sqrt{x-2}$$

$$\leq 1 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم: $\sqrt{x-2} = 1-y \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1-y$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-2 = 1-2y+y^2 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 3$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y, x} y = x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 3, \quad D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 1]$$

برای به دست آوردن ضابطه $f^{-1}(-x)$ ، در ضابطه $f^{-1}(x)$ جای x ها، $-x$

$$f^{-1}(-x) = x^2 + 2x + 3$$

می‌گذاریم:

دامنه آن هم دقیقاً قرینه دامنه $f^{-1}(x)$ است: $D_{f^{-1}(-x)} = [-1, +\infty)$

$$D_g = D_{f^{-1}(x)} \cap D_{f^{-1}(-x)} = [-1, 1]$$

پس:

● با توجه به $\alpha - 3$ که با یک عبارت رادیکالی برابر شده، پس باید $\alpha \leq 3$ باشد، در نتیجه $\alpha = 4 - \sqrt{3}$ قبول است.

۶۴۳. **راه اول:** اول $g^{-1} \circ f^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} g^{-1}(x) = x^2, & x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(1 + \sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})^2$$

حالا باید وارون $g^{-1} \circ f^{-1}$ را حساب کنیم تا به fog برسیم:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})^{-1} = fog$$

$$y = (1 + \sqrt{x})^2 \xrightarrow{\text{تنها کردن } x} \sqrt{y} = 1 + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} x = y - 2\sqrt{y} + 1$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض کردن}} y = x - 2\sqrt{x} + 1$$

راه دوم: با داشتن f^{-1} و g^{-1} ، ضابطه f و g را پیدا می‌کنیم و بعد fog را تشکیل می‌دهیم:

● ضابطه f^{-1} : $y = 1 + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{تنها کردن } x} \sqrt{x} = y - 1$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x = (y - 1)^2 \xrightarrow{\text{عوض کردن}} y = (x - 1)^2$$

● ضابطه g^{-1} : $y = x^2 \xrightarrow{\text{تنها کردن } x} |x| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y}$

$$x = \sqrt{y} \xrightarrow{\text{عوض کردن}} y = \sqrt{x}$$

حالا با داشتن $f(x) = (x - 1)^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه fog را می‌نویسیم:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - 1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$$

۶۴۴. **ف** در رابطه $y = f(3x - 1)$ برای تنها کردن x از قاعده $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ استفاده می‌کنیم:

$$y = f(3x - 1) \Rightarrow f^{-1}(y) = 3x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{تنها کردن } x} 3x = f^{-1}(y) + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 1}{3} \xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض کردن}} y = \frac{f^{-1}(x) + 1}{3}$$

۶۴۵. **ف** سعی می‌کنیم $f(-1)$ را به $g(k)$ تبدیل کنیم تا قسمت بالای آکولاد را ساده کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$$

در تساوی $g(x) = f(2x + 5)$ باید $2x + 5$ برابر -1 باشد، پس $x = -3$ را قرار می‌دهیم:

$$g(x) = f(2x + 5) \xrightarrow{x=-3} f(-1) = g(-3)$$

پس تساوی $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ را می‌توانیم به شکل $f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))$ بنویسیم.

حالا جای $g^{-1}(g(-3))$ می‌نویسیم -3 : $f^{-1}(g^{-1}(g(-3))) = f^{-1}(-3)$
ضابطه f^{-1} را هم داریم، پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2}{9} + \sqrt[3]{9x} \Rightarrow f^{-1}(-3) = -\frac{27}{9} + \sqrt[3]{-27}$$

$$= -3 - 3 = -6$$

مقدار $f(6)$ را از ضابطه‌اش حساب می‌کنیم: $f(x) = 2x - 5 \Rightarrow f(6) = 7$
پس تساوی $f(6) = g(a)$ به شکل $g(a) = 7$ درمی‌آید. با توجه به وجود زوج مرتب $(4, 7)$ در تابع g ، نتیجه می‌گیریم: $a = 4$.

۶۳۸. **۱** از $g^{-1}(f(a)) = 3$ نتیجه می‌گیریم $g(3) = f(a)$.

با توجه به زوج مرتب $(3, -2)$ در g ، نتیجه می‌گیریم $g(3) = -2$ ، پس:

$$f(a) = -2$$

با توجه به ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ ، برای $f(a)$ از هر دو ضابطه استفاده می‌کنیم:

$$\text{ضابطه بالا: } f(a) = \sqrt{a} \Rightarrow -2 = \sqrt{a} \quad \times$$

$$\text{ضابطه پایین: } f(a) = -\sqrt{-a} \Rightarrow -2 = -\sqrt{-a} \Rightarrow \sqrt{-a} = 2$$

$$\Rightarrow a = -4$$

۶۳۹. **۳** از تساوی $g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8$ ، نتیجه می‌گیریم $g(8) = f^{-1}(a)$
از ضابطه‌اش حساب می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{5x + 9} \Rightarrow g(8) = \sqrt{49} = 7$$

پس تساوی به شکل $7 = f^{-1}(a)$ درمی‌آید و از آن به $f(7) = a$ می‌رسیم.

با توجه به زوج مرتب $(7, 3)$ ، نتیجه می‌گیریم: $a = 3$.

۶۴۰. **۱** محاسبه $g^{-1}(f^{-1}(20))$ دو مرحله دارد:

(۱) برای محاسبه $f^{-1}(20)$ باید معادله $f(x) = 20$ را حل کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} = 20 \xrightarrow{\text{حدس}} x = 16$$

(۲) حالا باید $g^{-1}(16)$ را محاسبه کنیم: $g(x) = 16 \Rightarrow \frac{9x + 6}{1 - x} = 16$

$$\Rightarrow 9x + 6 = 16 - 16x \Rightarrow 25x = 10 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$g^{-1}(f^{-1}(20)) = \frac{2}{5}$$

پس:

۶۴۱. **۴** محاسبه $f^{-1}(g^{-1}(-9))$ دو مرحله دارد:

(۱) برای محاسبه $g^{-1}(-9)$ باید معادله $g(x) = -9$ را حل کنیم:

$$g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow -9 = \frac{3-x}{2} \Rightarrow -18 = 3-x \Rightarrow x = 21$$

(۲) حالا باید $f^{-1}(21)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 21 \Rightarrow x^2 - 4x + 9 = 21 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \xrightarrow{x \geq 2} \begin{cases} x = 6 \checkmark \\ x = -2 \times \end{cases}$$

$$f^{-1}(g^{-1}(-9)) = 6$$

پس:

۶۴۲. **۲** می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ ، آن‌گاه $f(b) = a$.

● نقطه $(\alpha, 0)$ روی تابع $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ است، پس:

$$y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \xrightarrow{(\alpha, 0)} \alpha = g^{-1}(f^{-1}(0))$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نکته}} g(\alpha) = f^{-1}(0)$$

● برای به دست آوردن $f^{-1}(0)$ ، کافی است معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$\log_1(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 1^0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} f^{-1}(0) = 3$$

● ادامه می‌دهیم:

$$g(\alpha) = f^{-1}(0) \Rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2\alpha - 4} = 3 - \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 2\alpha - 4 = 9 - 6\alpha + \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0$$

$$\xrightarrow{+3} \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 3 \Rightarrow (\alpha - 4)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \alpha - 4 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 4 \pm \sqrt{3}$$